Département MIDO
L3 informatique

Modélisation et simulation stochastique
Année 2007–2008

1 Introduction

2 Révisions

3 Processus de Poisson

3.1 Introduction

On considère une route sur laquelle le passage moyen est d'un véhicule toutes les 10 secondes, avec 10% de camions, le reste étant des voitures particulières. Les questions qu'on peut se poser sont par exemple les suivantes :

1. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un camion passe dans un intervalle d'une minute ?
2. Sachant que 10 camions sont passés dans un intervalle de 5 minutes, quel est le nombre moyen de véhicules qui sont passés dans cet intervalle ?
3. Si 30 véhicules sont passés en 10 minutes, quelle est la probabilité pour que 3 d'entre eux soient des camions ?

Pour répondre à ce genre de questions, il faudra faire des hypothèses sur la loi du nombre d'arrivées sur un intervalle donné. Dans ce chapitre, on supposera que le processus correspondant est un processus de Poisson.

3.2 Processus ponctuels

On introduit d'abord la notion de processus ponctuel en considérant la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ des instants successifs de passage des véhicules, avec $T_0 = 0$. Ce type de processus s'applique à de nombreuses situations comme les arrivées de clients à un guichet, les émissions de particules radioactives, etc. De manière générale, on considère un évènement répétitif, nommé *top*, et on note les instants successifs auxquels il se produit.

La suite $(T_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'ensemble des nombres réels positifs, T_n étant la date du $n$ième top. C'est un processus stochastique qui vérifie :

1. $T_0 = 0$
2. $T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$, la suite est strictement croissante, ce qui suppose qu'il n'y a pas deux tops simultanés,
3. T_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui suppose qu'il n'y a pas d'accumulation vers un point particulier du temps.

3.3 Processus de comptage

On associe ensuite à ce processus ponctuel un processus dit de *comptage* qui, à chaque instant t, fait correspondre le nombre $N(t)$ de tops qui se sont produit dans l'intervalle $]0, t]$.

Le nombre (aléatoire) $N(t)$ est aussi égal à l'indice du dernier top qui s'est produit dans $]0, t]$. La famille $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus stochastique à temps continu, qui vérifie :

1. $N(0) = 0$
2. $N(b) - N(a)$ est le nombre de tops qui se sont produits dans l'intervalle $]a, b]$, pour $0 < a < b$.

3.4 Processus de Poisson

Définition 3.1. *Un processus de comptage $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson (homogène) de densité $\lambda > 0$ si*

1. *Pour toute suite $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k$, les variables aléatoires $N(t_{i+1}) - N(t_i)$, $0 \leq i \leq k-1$, sont indépendantes. Cette propriété exprime le fait que le processus est à* accroissements indépendants.
2. *Le nombre de tops dans un intervalle de longueur h suit une loi de Poisson de paramètre λh :*
$$P[N(t+h) - N(t) = k] = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^k}{k!}$$

On a donc en particulier $P[N(h) = k] = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^k}{k!}$ et $E[N(t+h) - N(t)] = E[N(h)] = \lambda h$.

La deuxième propriété implique en particulier que les accroissements sont *stationnaires*, c'est-à-dire ne dépendent que de la longueur de l'intervalle.

3.5 Loi des inter-arrivées

Etant donné un processus ponctuel $(T_n)_{n\geq 0}$, on définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des inter-arrivées par : $S_n = T_n - T_{n-1}$ pour $n \geq 1$. La variable aléatoire réelle S_n représente l'intervalle de temps entre deux arrivées de tops consécutives.

On a alors :

Théorème 3.2. *Si $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson (homogène) de densité $\lambda > 0$ associé à un processus ponctuel $(T_n)_{n\geq 0}$, alors la suite des inter-arrivées $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ, c'est-à-dire que $P[S_n \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$ et $E[S_n] = \frac{1}{\lambda}$.*

3.6 Autre définition des processus de Poisson

On a une sorte de réciproque au théorème3.2 : supposons qu'on considère une suite d'inter-arrivées $(S_n)_{n\geq 1}$ et qu'on lui associe les dates correspondantes en posant $T_n = S_1 + \cdots + S_n$ avec $T_0 = 0$. On peut alors définir un processus de comptage $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$. Si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson de densité λ.

3.7 Loi des arrivées

Pour un processus de Poisson $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ de densité λ, on sait que les inter-arrivées $(S_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et exponentielles de paramètre λ. On peut en déduire la loi des arrivées, c'est-à-dire de la suite $(T_n)_{n\geq 0}$. Pour $n \geq 1$, la v.a. $T_n = S_1 + \cdots + S_n$ suit une loi gamma, elle a pour densité sur $\mathbb{R}^+$:

$$f_{T_n}(s) = \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda s} (\lambda s)^{n-1}$$

3.8 Processus de Poisson marqués

On peut d'abord remarquer que si $(N_1(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(N_2(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors le processus défini par la somme : $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

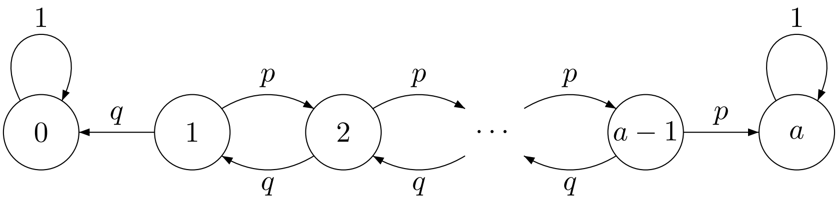
Dans l'autre sens, supposons que $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ soit un processus de Poisson pour lequel on peut diviser les arrivées en plusieurs catégories, dont on connait les probabilités. Alors on dit que le processus $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ est marqué.

Par exemple $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ pour deux catégories d'événements, avec les processus $(N_1(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(N_2(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ indépendants, le top de type 1 se produisant avec la probabilité p et le top de type 2 avec la probabilité $q = 1-p$. Dans ce cas, on peut montrer que $(N_1(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(N_2(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ sont des processus de Poisson de paramètres respectifs λp et λq.

4 Chaînes de Markov à temps discret

4.1 Introduction

On considère deux joueurs A et B qui font des parties successives (et indépendantes) de pile ou face. On suppose qu'à chaque partie, A gagne avec la probabilité p, donc perd avec probabilité $q = 1 - p$, avec $0 < p < 1$. On suppose de plus que la fortune globale pour les deux joueurs est a, un nombre entier d'euros, et qu'un joueur qui perd donne 1 euro à l'autre. Le jeu s'arrête dès qu'un joueur est ruiné.
On s'intéresse alors à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ où X_n est la somme possédée par le joueur A après la n^{eme} partie. Ces variables sont donc à valeurs dans l'ensemble $E = \{0, 1, \ldots, a-1, a\}$ qui est appelé l'ensemble des états du système.
On peut représenter les possibilités d'évolution de la fortune de A par le graphe suivant :



Les valeurs qui nous intéresseraient dans ce contexte sont, par exemple, les probabilités pour que A gagne connaissant son état de départ :

$P[A \text{ gagne}/X_0 = i]$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, a-1\}$.

4.2 Dépendance non Markovienne

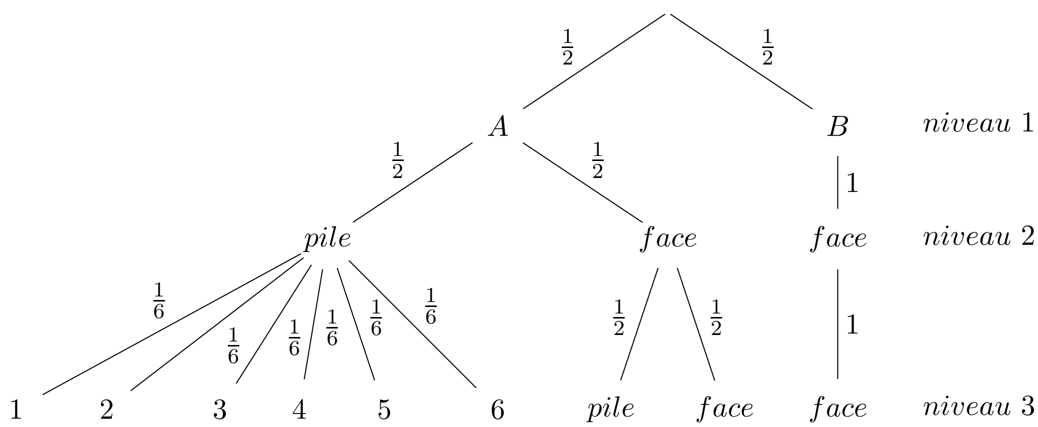
On considère le jeu suivant, qui utilise deux pièces A et B et un dé à 6 faces. La pièce A est équilibrée tandis que la pièce B a face des deux côtés. Le jeu procède en exactement trois étapes :

étape 1 : on choisit une des deux pièces

étape 2 : on lance la pièce choisie

étape 3 : si pile tombe, on jette le dé, et si face tombe, on relance la pièce.

L'ensemble des expériences correspondant à ce jeu peut être représenté par l'arbre suivant :



Une expérience correspondant à un chemin dans l'arbre, on obtient 9 expériences :

- $\omega_1 = (A,\ pile,\ 1)$ avec $P(\omega_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$. De même, $\omega_2 = (A,\ pile,\ 2)$ avec $P(\omega_2) = \frac{1}{24}$, et ainsi de suite jusqu'à $P(\omega_6) = \frac{1}{24}$.
- $\omega_7 = (A,\ face,\ pile)$ avec $P(\omega_7) = \frac{1}{8}$ et $\omega_8 = (A,\ face,\ face)$ avec $P(\omega_8) = \frac{1}{8}$.
- $\omega_9 = (B,\ face,\ face)$ avec $P(\omega_9) = \frac{1}{8}$.

On peut associer trois variables aléatoires à ce jeu : X_1 est le résultat du premier tirage, X_2 le résultat du deuxième tirage et X_3 le résultat du troisième tirage. Dans ce cas, l'expérience ω_1 peut aussi être notée $[X_1 = A, X_2 = pile, X_3 = 1]$ et les autres expériences s'expriment de façon analogue.
Avec cette notation, on a par exemple $P[X_2 = pile/X_1 = B] = 0$. Comparons maintenant les deux probabilités $P[X_3 = face/X_2 = face, X_1 = A]$ et $P[X_3 = face/X_2 = face, X_1 = B]$. Dans le premier cas, on obtient $\frac{1}{2}$ tandis que dans le second cas, on obtient 1.

Ces valeurs, comme le montrera la définition du paragraphe suivant, indiquent que ce jeu **n'est pas** une chaîne de Markov.

4.3 Définition d'une chaîne de Markov à temps discret

Définition 4.1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un même ensemble E (généralement choisi comme un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$). La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov si :*
pour tout entier $n \geq 1$, pour toute suite $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ d'éléments de E, on a :

$$P[X_{n+1} = j/X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i] = P[X_{n+1} = j/X_n = i]$$

lorsque cette probabilité est bien définie.

Cette définition exprime que le résultat du $(n+1)^{eme}$ tirage ne dépend que du résultat du n^{eme} tirage. En particulier, ce résultat est indépendant des résultats des tirages antérieurs. On voit alors pourquoi le jeu considéré au paragraphe précédent n'est pas une chaîne de Markov, puisque pour une chaîne de Markov, les probabilités $P[X_3 = j/X_2 = i, X_1 = k]$ et $P[X_3 = j/X_2 = i, X_1 = h]$ sont toutes deux égales à $P[X_3 = j/X_2 = i]$.

Définition 4.2. *Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est dite* homogène *si de plus la probabilité $P[X_{n+1} = j/X_n = i]$ ne dépend pas de n.*
Dans ce cas, on a en particulier $P[X_{n+1} = j/X_n = i] = P[X_1 = j/X_0 = i]$ et on pose $p_{i,j} = P[X_1 = j/X_0 = i]$, ce qui définit la matrice de transition de la chaîne : $P = (p_{i,j})_{E\times E}$.

Remarquons que pour tout i, les événements $[X_1 = j]$, $j \in E$ forment l'ensemble de tous les événements possibles, on a donc : $\sum_{j\in E} p_{i,j} = 1$, ce qui exprime que la somme des éléments d'une ligne quelconque de la matrice vaut 1.

Une matrice satisfaisant cette propriété est dite *stochastique*.

Par exemple, la matrice correspondant au problème de la ruine du joueur, vu au premier paragraphe, est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

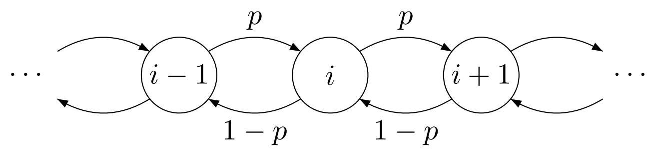
4.4 Graphe d'une chaîne de Markov

Comme le montre l'exemple introductif, le graphe d'une chaîne de Markov homogène est obtenu en prenant comme sommets les états de la chaîne, c'est-à-dire l'ensemble E. Pour deux états i et j de E, le graphe comporte une transition d'étiquette $p_{i,j}$ de i vers j si $p_{i,j} > 0$.

Considèrons l'exemple de la promenade aléatoire sur une ligne droite : l'ensemble des états est $E = \mathbb{Z}$ (l'ensemble des entiers relatifs) et on suppose qu'à partir d'un état i, on peut passer uniquement dans l'un des deux états voisins : $i+1$ ou $i-1$, avec les probabilités respectives p et $1-p$, où $0 < p < 1$. On a donc les coefficients de la matrice de transition :

$$p_{i,j} = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le graphe infini associé :



4.5 Relation de Chapman-Kolmogorov

Pour une chaîne de Markov homogène, la matrice $P = (p_{i,j})_{E\times E}$ fournit les probabilités $p_{i,j} = P[X_{n+1} = j/X_n = i] = P[X_1 = j/X_0 = i]$ de passer de l'état i à l'état j en une étape. On s'intéresse maintenant aux probabilités de passer d'un état à un autre en 2, 3, ..., n étapes, et on notera $p^{(n)}_{i,j} = P[X_n = j/X_0 = i]$ la probabilité de passer de i à j en n étapes.

Calculons par exemple la probabilité $p^{(2)}_{i,j} = P[X_2 = j/X_0 = i]$ de passer de i à j en 2 étapes :

$$\begin{aligned}
P[X_2 = j/X_0 = i] &= \sum_{k\in E} P[X_2 = j, X_1 = k/X_0 = i] \text{ (en considérant toutes les possibilités pour } X_1\text{)} \\
&= \sum_{k\in E} P[X_2 = j, X_1 = k, X_0 = i]/P[X_0 = i] \text{ (probabilités conditionnelles)} \\
&= \sum_{k\in E} P[X_2 = j/X_1 = k, X_0 = i] \times P[X_1 = k, X_0 = i]/P[X_0 = i] \\
&= \sum_{k\in E} P[X_2 = j/X_1 = k, X_0 = i] P[X_1 = k/X_0 = i] \\
&= \sum_{k\in E} P[X_2 = j/X_1 = k] P[X_1 = k/X_0 = i] \text{ (propriété de Markov)} \\
&= \sum_{k\in E} P[X_1 = j/X_0 = k] P[X_1 = k/X_0 = i] \text{ (chaîne homogène)} \\
&= \sum_{k\in E} p_{k,j} p_{i,k} = \sum_{k\in E} p_{i,k} p_{k,j}
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la matrice P^2.

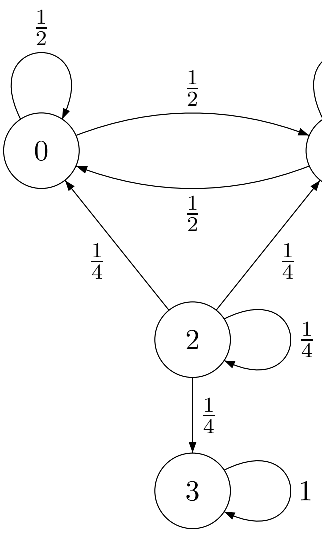
Plus généralement, on a le théorème suivant, dit de Chapman-Kolmogorov (qui se démontre par récurrence) :

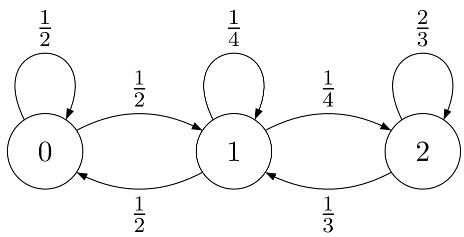
Théorème 4.3. *Si $P = (p_{i,j})_{E\times E}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène, alors la matrice des probabilités $p_{i,j}^{(n)} = P[X_n = j/X_0 = i]$ de passer de i à j en n étapes est P^n :*

$$(p_{i,j}^{(n)})_{E\times E} = P^n$$

4.6 Décomposition des états en classes

La décomposition du graphe d'une chaîne de Markov en composantes fortement connexes donne une partition des états en classes. Par exemple, la chaîne ci-dessous à gauche comporte trois classes : $C_1 = \{0, 1\}$, $C_2 = \{2\}$ et $C_3 = \{3\}$, tandis que la chaîne ci-dessous à droite comporte une seule classe. Dans ce dernier cas, la chaîne est dite *irréductible*.





Cette notion est formalisée par les définitions suivantes.

Définition 4.4. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov et i, j deux états de cette chaîne. On dit que j est accessible à partir de i s'il existe $n \geq 0$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$, c'est-à-dire qu'il existe n tel que la probabilité d'atteindre j à partir de i en n étapes soit non nulle.*
On note ceci $i \xrightarrow{*} j$ et on dit que i et j communiquent si $i \xrightarrow{*} j$ et $j \xrightarrow{*} i$.

On peut montrer que la relation de communication est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive), et les classes d'équivalence forment alors une partition de l'ensemble E des états de la chaîne. De plus, on peut étendre la relation $\xrightarrow{*}$ aux classes : pour deux classes C et C', on dit que $C \xrightarrow{*} C'$ s'il existe $i \in C$ et $j \in C'$ tels que $i \xrightarrow{*} j$. Notons que si $C \xrightarrow{*} C'$, alors on ne peut pas revenir de C' à C.
Dans l'exemple ci-dessous à gauche avec trois classes, on a $C_2 \xrightarrow{*} C_1$ et $C_2 \xrightarrow{*} C_3$.

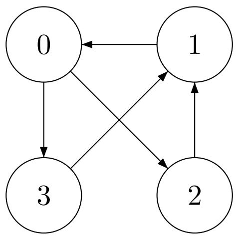
Définition 4.5. *Les classes maximales pour cet ordre partiel sont appelées* classes récurrentes. *Les états de ces classes sont aussi appelés états récurrents. Les autres classes et les états*

qu'elles contiennent sont dits transitoires*.*
Un état i est dit absorbant *si pour tout $n \geq 0$, $p_{i,i}^{(n)} = 1$. Un tel état, dont on ne peut pas ressortir, forme une classe à lui tout seul.*
Un état i est un état de retour *s'il existe $n \geq 1$ tel que $p_{i,i}^{(n)} > 0$, c'est-à-dire que la probabilité d'atteindre i à partir de lui-même en strictement plus de 0 étapes est non nulle.*
Un état de non-retour *est un état qui n'est pas un état de retour : pour tout $n \geq 1$, $p_{i,i}^{(n)} = 0$. Un tel état, où l'on ne revient jamais, forme aussi une classe à lui tout seul.*

Par exemple, C_1 et C_3 sont récurrentes tandis que C_2 est transitoire. L'état 3 est absorbant.
Remarque : on peut montrer qu'une chaîne de Markov finie a au moins un état récurrent.

4.7 Périodicité

Considérons la chaîne suivante.



avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On voit qu'elle est irréductible et qu'elle contient deux cycles : $0 \to 2 \to 1 \to 0$ et $0 \to 3 \to 1 \to 0$, tous deux de longueur 3. On dit que cette chaîne est *périodique de période* 3. On peut alors décomposer l'unique classe en sous-classes $\{1\}$, $\{0\}$ et $\{2,3\}$, avec le graphe suivant :

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[rr] & & \{0\} \arrow[dl] \\ & \{2,3\} \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Cette notion est formalisée dans la définition et la propriété suivantes :

Définition 4.6. *Soit i un état de retour. La période de i est le pgcd (plus grand commun diviseur) des longueurs des cycles de i à i. Si le pgcd vaut 1, on dit que l'état est* apériodique*. On définit par convention la période d'un état de non-retour comme $+\infty$.*

On peut montrer que tous les états d'une même classe ont la même période, ce qui conduit à parler de période d'une classe.

4.8 Temps de séjour

Lorsque $p_{j,j} \neq 0$, le temps de séjour (c'est-à-dire le nombre d'étapes passées) dans un état j d'une chaîne de Markov suit une loi géométrique (sinon on ne reste pas dans l'état j). En effet, à chaque étape, la probabilité de rester dans j est $p_{j,j}$ alors que celle d'en sortir est $1 - p_{j,j}$. La probabilité de passer k étapes dans l'état j est donc $P[N_j = k] = (1 - p_{j,j})p_{j,j}^k$.

4.9 Temps d'atteinte

On s'intéresse maintenant au premier instant $n \geq 1$ où un état donné j est atteint par une chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$, appelé *temps d'atteinte* de j, et on note donc :

$$T_j = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = j\}$$

L'événement $[T_j = n]$ peut aussi s'exprimer comme $[X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j]$, ce qui signifie qu'il ne dépend que des résultats antérieurs à l'étape n.

On considère alors la probabilité d'atteindre pour la première fois j en n étapes, sachant qu'on part de i :

$$f_{i,j}^{(n)} = P[T_j = n / X_0 = i] \text{ pour } n \geq 1 \;\text{ et }\; f_{i,j}^{(0)} = 0$$

donc en particulier, $f_{i,j}^{(1)} = p_{i,j}$.
La probabilité de passer au moins une fois par j (toujours en partant de i) est :

$$f_{i,j} = P[T_j < +\infty / X_0 = i] = \sum_{n\geq 1} f_{i,j}^{(n)}$$

et $f_{i,i}$ est donc la probabilité d'au moins un retour en i.
Le temps moyen d'atteinte de j à partir de i est l'espérance conditionnelle de T_j (partant de i) :

$$M_{i,j} = E[T_j / X_0 = i] = \sum_{n\geq 1} n f_{i,j}^{(n)}$$

La valeur $M_{i,i}$ est donc le temps moyen de retour en i.
On a alors la caractérisation suivante :

Théorème 4.7. *Soit i un état de la chaîne.*
i est transitoire $\Leftrightarrow f_{i,i} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} p_{i,i}^{(n)} < +\infty$.
i est récurrent $\Leftrightarrow f_{i,i} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} p_{i,i}^{(n)} = +\infty$.
De plus, i est dit
récurrent non nul *si le temps moyen de retour en i est fini :* $M_{i,i} < +\infty$
récurrent nul *si le temps moyen de retour en i est infini :* $M_{i,i} = +\infty$

4.10 Nombre de passages

Considérons maintenant la variable aléatoire N_j représentant le nombre de passages dans l'état j. Elle est définie par : $N_j = \sum_{n\geq 1} 1_{\{X_n = j\}}$.
Rappelons que 1_A est la fonction indicatrice de l'ensemble A, définie par $1_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $1_A(\omega) = 0$ sinon.

On a alors, en notant $R_{i,j}$ le nombre moyen de passages dans l'état j partant de i :

$$R_{i,j} = E[N_j / X_0 = i] = \sum_{n\geq 1} p_{i,j}^{(n)}$$

et on peut montrer les résultats suivants pour un état transitoire :

Théorème 4.8. *Soit j un état transitoire. Alors :*

$$R_{i,j} = \frac{f_{i,j}}{1 - f_{j,j}}$$

En particulier, la suite $(p_{i,j}{}^{(n)})_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
La variable aléatoire N_j (partant de j) suit une loi géométrique :

$$P[N_j = k/X_0 = j] = (1 - f_{j,j})f_{j,j}^k \text{ pour } k \geq 0$$

Remarque : on retrouve alors le fait que $R_{j,j} = E[N_j/X_0 = j] = \frac{f_{j,j}}{1-f_{j,j}} = \sum_{n\geq 1} p_{j,j}^{(n)}$ et on obtient aussi $\sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{j,j}}$.

4.11 Techniques de calcul

On remarque que pour aller de i à j en exactement n étapes, on atteint d'abord en une étape un état k différent de j, puis on va de k à j en exactement $n-1$ étapes (sans repasser par j). Pour des valeurs distinctes de k, les chemins obtenus sont distincts ce qui permet d'obtenir la formule :

$$f_{i,j}^{(n)} = \sum_{k\neq j} p_{i,k} f_{k,j}^{(n-1)}$$

pour tout $n \geq 1$ et donc de calculer les probabilités $f_{i,j}^{(n)}$ par récurrence. On en déduit :

$$f_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{k\neq j} p_{i,k} f_{k,j}$$

Les temps moyens d'atteinte $M_{i,j}$ vérifient : $M_{i,j} = 1 + \sum_{k\neq j} p_{i,k} M_{k,j}$

4.12 Régime transitoire : lois des X_n

Une conséquence importante du théorème de Chapman-Kolmogorov est la connaissance des lois des variables aléatoires X_n, $n \geq 1$, en fonction de la loi de X_0. Cette loi caractérise le régime transitoire de la chaîne. Notons :

$$\pi^{(0)} = (\pi_1^{(0)}, \pi_2^{(0)}, \ldots, \pi_i^{(0)}, \ldots)$$

le vecteur (ligne) défini par $\pi_i^{(0)} = P[X_0 = i]$ pour $i \in E$, qui décrit la loi de X_0, et

$$\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_i^{(n)}, \ldots)$$

le vecteur défini par $\pi_i^{(n)} = P[X_n = i]$ pour $i \in E$, qui décrit la loi de X_n.

Alors, pour tout j, on a :

$$\begin{aligned}
P[X_n = j] &= \sum_{i\in E} P[X_n = j, X_{n-1} = i] \\
&= \sum_{i\in E} P[X_n = j/X_{n-1} = i] P[X_{n-1} = i] \\
&= \sum_{i\in E} P[X_1 = j/X_0 = i] P[X_{n-1} = i] \\
&= \sum_{i\in E} p_{i,j} \pi_i^{(n-1)} = \sum_{i\in E} \pi_i^{(n-1)} p_{i,j}
\end{aligned}$$

ce qui correspond au produit du vecteur $\pi^{(n-1)}$ par la matrice P. On a donc :

$$\begin{aligned} & \pi^{(n)} = \pi^{(n-1)}P \quad \text{pour tout } n \geq 1 \\ \text{et} \quad & \pi^{(n)} = \pi^{(0)}P^n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{aligned}$$

4.13 Régime stationnaire

Un autre objectif pour une chaîne de Markov est de caractériser son comportement pour des grandes valeurs de n : si les lois de X_n se "stabilisent" quand n tend vers l'infini, on obtient un *régime stationnaire*. Formellement, un tel comportement existe lorsque la suite des matrices $(P^n)_{n\geq 1}$ a une limite pour $n \to +\infty$. Dans ce cas, un passage à la limite dans la première équation ci-dessus permet la définition suivante :

Définition 4.9. *Une loi de probabilité $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ sur l'ensemble E des états est* stationnaire *si elle vérifie $\pi = \pi P$.*

On sait déja que pour un état transitoire j, la suite $p_{i,j}^{(n)}$ tend vers 0. Donc si la matrice P^n converge, sa limite a toute la colonne j nulle, et $\pi_j = 0$.

On peut montrer :

Théorème 4.10. *Si la chaîne est irréductible et apériodique, la distribution $\pi^{(n)}$ admet une limite, indépendante de la distribution initiale. De plus,*

- *si tous les états sont transitoires ou récurrents nuls (possible seulement si la chaîne est infinie), cette limite est nulle,*
- *si tous les états sont récurrents non nuls (ce qui est le cas d'une chaîne irréductible apériodique finie), la distribution stationnaire est unique, elle est solution du système $\pi = \pi P$ avec $\sum_{i\in E} \pi_i = 1$ et elle est reliée aux temps moyens de retour par la relation : $\pi_j = \frac{1}{M_{j,j}}$.*