

TD 1 : LTL

Exercice 1

Les propositions atomiques trainG et trainD signifient qu'un train veut entrer sur la voie respectivement par le côté gauche ou par le côté droit et les propositions atomiques trainG-Voie et trainDVoie signifient qu'un train est en train de franchir la voie respectivement par le côté gauche ou droit. Exprimez en LTL les propositions suivantes :

- (a) φ_1 : "A chaque fois qu'un train est sur la voie, la voie finit par être libre."
- (b) φ_2 : "Infiniment souvent un train traverse la voie".
- (c) φ_3 : "A chaque fois qu'un train venant de gauche est sur la voie, un train venant de droite ne peut pas se trouver sur la voie tant que celle-ci n'a pas été libérée."

Exercice 2

On considère le préfixe de trace suivant :

$$\emptyset, \{p\}, \{p, q\}, \{q\}, \{p\}, \emptyset, \{p, q\}$$

Déterminez, pour chaque position de ce préfixe de trace, si les formules suivantes sont vérifiées ou non :

- (a) $p \wedge q$
- (b) $F(p \wedge q)$
- (c) $p \cup q$
- (d) $Fp \wedge Fq$
- (e) $G(p \vee q)$

Exercice 3

Les équivalences suivantes sont-elles vraies ? Si oui, démontrez-le, sinon donnez une trace contre-exemple.

- (a) $G(Fp \wedge Fq)$ et $GFp \wedge GFq$
- (b) $F(Gp \wedge Gq)$ et $FGp \wedge FGq$
- (c) $G(Fp \vee Fq)$ et $GFp \vee GFq$.
- (d) $F(Gp \vee Gq)$ et $FGp \vee FGq$.
- (e) $GF(p \wedge q)$ et $GFp \wedge GFq$
- (f) $GF(p \vee q)$ et $GFp \vee GFq$
- (g) $FG(p \wedge q)$ et $FGp \wedge FGq$
- (h) $FG(p \vee q)$ et $FGp \vee FGq$

Exercice 4

On considère le préfixe de trace suivant :

$$\{q\}\{q\}\{p\}\{p\}\{r\}\{q, r\}q\{p\}\{p\}\{r\}$$

- (a) Déterminer quelles sont les formules qui sont vraies sur le préfixe de trace ci-dessus :
 1. $Gp \vee G\neg p$
 2. $Fp \wedge F\neg p$
 3. $F(p \wedge Xq)$
 4. $Fp \wedge Xq$

5. $(G(p \rightarrow q)) \rightarrow Gr$

(b) Pour chacune des formules ci dessus, proposez deux traces modèles de cette formule.

Exercice 5

On introduit un nouvel opérateur, **B**, pour *Before*, défini ainsi : $t, i \models \varphi B \psi$ ssi pour tout $j \geq i$ tel que $t, j \models \psi$, il existe $i \leq k < j$ tel que $t, k \models \varphi$.

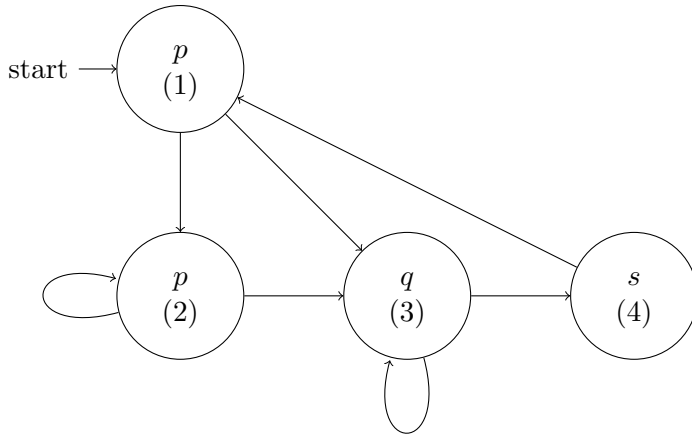
- (a) Donnez une trace (ou un préfixe de trace) qui satisfait pBq .
- (b) Donnez une trace t (ou un préfixe de trace) tel qu'il existe $i \geq 0$ tel que $t, i \models q$ mais qui ne satisfait pas pBq .
- (c) Exprimez une formule équivalente à $\varphi B \psi$, en n'utilisant que des opérateurs LTL définis en cours. Prouvez que les deux formules sont bien équivalentes.

Exercice 6

(*) Prouvez la loi d'expansion $\varphi_1 R \varphi_2 \equiv \varphi_2 \wedge (\varphi_1 \vee X(\varphi_1 R \varphi_2))$

Exercice 7

On considère la structure de Kripke suivante dans laquelle les propositions atomiques vraies dans chaque état sont indiquées à l'intérieur de l'état, et le nom de l'état est indiqué entre parenthèses. Pour chacune des formules ci-dessous, donner l'ensemble des états la vérifiant.



- (a) $AG p$
- (b) $EG A p U q$
- (c) $EX AF s$
- (d) $EF EG q$

Exercice 8

Exprimer, si c'est possible, les formule CTL suivantes en LTL :

- $AG(\text{Bad} \rightarrow AF \neg \text{Good})$.
- $AG(\text{Bad} \rightarrow EF \neg \text{Good})$.