Initiation à la Théorie des Catégories

Gérard Huet
INRIA

20 Décembre 1987

Notes de cours du DEA “Fonctionalité, Structures de Calcul et Programmation” donné à l’Université Paris VII en 1983-84 et 1984-85.

Table des matières

Introduction

La théorie des catégories est la théorie de la fonctionnalité, abstraite de l'extensionalité des fonctions au sens de la théorie des ensembles.

Ces notes consistent en trois chapitres. Le premier présente de façon élémentaire les définitions de base. Le deuxième présente les principales propriétés universelles, sous forme de théories équationnelles généralisées. En particulier, la théorie des catégories calculatoires est étudiée en détail. Le troisième chapitre donne des compléments sur l'algèbre universelle, l'adjonction, l'universalité et la cohérence, en quatre paragraphes qui peuvent être lus indépendamment les uns des autres.

1 Catégories, foncteurs, transformations naturelles

1.1 Définition d'une catégorie

Une *catégorie* $\mathbb{C}$ se compose d'*objets* et de *flèches*. On écrit $A\!:\!\mathbb{C}$ pour dire que A est un objet de $\mathbb{C}$, et $f : \mathbb{C}(A, B)$ pour dire que f est une flèche de $\mathbb{C}$ reliant l'objet A à l'objet B. En général la catégorie $\mathbb{C}$ dans laquelle on travaille est sous-entendue, et on écrit plus simplement $f\!:\!A \to B$.

Jusqu'ici, une catégorie est un graphe orienté, dont les nœuds sont des objets et les arcs sont les flèches. Mais les catégories possèdent en plus la structure minimale donnée par l'associativité de la composition des flèches. Les flèches doivent donc être vues comme les *chemins* du graphe, quotientés par l'égalité des flèches.

On donnera le plus souvent une interprétation fonctionnelle aux flèches considérées comme des opérateurs sur les objets. Ainsi on dira que A (resp. B) est le *domaine* (resp. *codomaine*) de la flèche $f\!:\!A \to B$. Souvent les objets auront une structure commune, et les flèches seront des applications préservant cette structure. Ceci explique la terminologie usuelle de *morphisme* (au lieu de flèche), par analogie avec les homomorphismes de l'Algèbre Universelle.

Donnons maintenant formellement les postulats catégoriques. Pour tout objet A il existe une flèche $\mathrm{id}_A : A \to A$ (l'*identité* de A), et pour toutes flèches $f : A \to B$ et $g : B \to C$ il existe une flèche $f; g : A \to C$ (la *composition* de f et g), vérifiant les axiomes :

$$\begin{aligned}\mathbf{Idl}&:\mathrm{id}; f = f\\ \mathbf{Idr}&:f; \mathrm{id} = f\\ \mathbf{Ass}&:(f; g); h = f; (g; h)\end{aligned}$$

Dans les équations ci-dessus nous avons omis les types, qui sont considérés implicites. Notre point de vue est que id est une constante *polymorphe*, dont le *type* $A \to A$ contient une variable libre A. De même la composition est une opération binaire paramétrique en 3 objets A, B et C. Une équation telle que **Idl**dénote toutes les équations entre flèches qui respectent les types. On peut montrer que toute expression typable possède un *type principal*, qui peut être calcul par l'algorithme d'*unification*.

On peut donner une interprétation logique à une catégorie. Les objets sont interprétés comme des *propositions*, et la flèche "$\to$" est interprétée comme la *conséquence* logique. Une flèche $f : A \to B$ est interprétée comme une *preuve* qu'on peut déduire la conclusion B de l'hypothèse A. Les opérateurs id et ";" spécifient que la déduction induit un préordre sur les propositions. Les axiomes ci-dessus postulent une congruence sur les preuves, préservant les propositions qu'elles prouvent. Cette congruence peut être réalisée par une *normalisation*, si on utilise ces axiomes comme des règles de simplification orientées de la gauche vers la droite. La terminaison des simplifications permet de définir la forme *canonique* d'une preuve. Cette interprétation *intuitionniste* est conforme à l'isomorphisme de Curry-Howard entre types et propositions. Les (parties gauches) des règles de simplification sont traditionnellement appelées *coupures* en théorie de la démonstration.

1.2 Exemples de (petites) catégories

1.2.1 Catégories discrètes

Tout ensemble $\mathcal{E}$ détermine une catégorie $\mathbf{Discr}(\mathcal{E})$, d'objets les éléments de $\mathcal{E}$, et de seules flèches les identités correspondantes. Réciproquement, une catégorie est dire *discrète* lorsque ses seules flèches sont des identités. Il y a donc isomorphisme entre les ensembles et les catégories discrètes.

1.2.2 Monoïdes

Tout monoïde $\mathbf{M} = \langle \mathcal{E}, 1, \star \rangle$ détermine une catégorie $\mathbf{Mon}(\mathbf{M})$ possédant $\mathcal{E}$ pour objet unique et $\mathcal{E}$ pour ensemble des flèches $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. On prend 1 pour $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ et on définit $f; g$ comme $f \star g$.

Réciproquement, dans toute catégorie, à tout objet A correspond le monoïde des A-endomorphismes $\mathbf{Mon}(A) = \langle A \to A, \mathrm{id}_A, ; \rangle$. Il y a donc isomorphisme entre les monoïdes et les catégories à objet unique.

1.2.3 Préordres

Tout préordre $\mathbf{P} = \langle \mathcal{E}, \leq \rangle$ détermine une catégorie $\mathbf{Pre}(\mathbf{P})$ dont les objets sont les éléments de $\mathcal{E}$, et possédant une flèche de A vers B ssi $A \leq B$. Réciproquement, les préordres sont les catégories ayant une flèche au plus entre deux objets.

La dualité de l'interprétation logique d'une catégorie vue comme espace des preuves d'un préordre nous fournit l'interprétation d'un préordre comme quotient d'une catégorie par un principe d'abstraction, stipulant que les preuves ne sont pas pertinentes, et que seule leur existence nous importe. On retrouve ici le point de vue Booléen de la Logique Classique.

1.2.4 Quelques catégories remarquables

$\mathbb{0}$: la catégorie *initiale* $\mathbf{Discr}(\emptyset)$, sans objets.

$\mathbb{1}$: la catégorie *terminale* $\mathbf{Discr}(\{\emptyset\})$, qui possède un objet unique $\emptyset$, et une flèche unique $\mathrm{id}_\emptyset$.

$\mathbb{2}$: la catégorie $\mathbf{Pre}(\mathbf{B})$ avec $\mathbf{B}$ l'algèbre Booléenne à deux éléments $\{0, 1\}$ reliés par $0 \leq 1$:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[loop left, "\mathrm{id}_0"] \arrow[r, "\leq"] & 1 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_1"]
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{\Omega}$: la catégorie $\mathbf{Pre}(\mathbb{N})$ avec $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, \ldots\}$ muni de l'ordre standard $\leq$.

Si on définit les entiers naturels comme des ensembles cardinaux, par $0 = \emptyset$ et $n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}$, l'ensemble des cardinaux finis $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ permet de définir d'autres catégories, telle que :

$\mathbb{\Delta}$: la catégorie *simpliciale*, avec Ω comme ensemble d'objets et dont les flèches de m vers n sont toutes les fonctions croissantes de m vers n. Ici l'ordre sur les entiers coïncide avec l'appartenance et avec l'inclusion.

1.2.5 Catégories matricielles

Pour tout anneau Abélien $\mathbf{A}$, la catégorie $\mathbf{Matr}(\mathbf{A})$ a pour objets les entiers naturels, et pour flèches de m vers n les $\mathbf{A}$-matrices de dimension (m, n), avec pour composition le produit matriciel.

1.2.6 Catégories de fonctions

Si $\mathcal{U}$ est un ensemble d'ensembles, il détermine la catégorie $\mathbf{Ens}(\mathcal{U})$ qui a pour ensemble d'objets $\mathcal{U}$ et pour flèches $f : A \to B$ les fonctions de domaine A et de codomaine B. La composition est ici la composition usuelle (à l'ordre de ses arguments près : $f; g = g \circ f$).

Il convient de souligner que le typage des flèches est essentiel, et permet de définir une théorie de la fonctionnalité plus abstraite que celle basée sur les fonctions au sens ensembliste. Par exemple, si A est une partie stricte de B, id_A est une flèche distincte de la flèche $A \to B$ obtenue par l'inclusion canonique, elle-même distincte de id_B.

1.3 Grandes catégories

1.3.1 Problèmes de fondement

On aimerait abstraire l'ensemble $\mathcal{U}$ considéré dans la dernière section, en se plaçant dans un univers $\mathcal{U}$ contenant tous les ensembles nécessaires au développement d'une théorie mathématique donnée. Il se pose ici un problème de fondement. On ne peut pas parler de l'ensemble de tous les ensembles, car cette notion mène aux paradoxes classiques. On ne peut pas postuler non plus un axiome de comprhension général, garantissant l'existence de l'ensemble caractéristique d'un prédicat arbitraire P (par exemple pour $P(x)$ défini par "x n'appartient pas à x"). Il est usuel de restreindre ce principe aux x qui appartiennent à un ensemble donné $\mathcal{E}$. Il est alors pratique de postuler l'existence d'un univers $\mathcal{U}$, contenant Ω, et fermé par singleton, appartenance, paire, produit, passage aux parties, union générale et image de fonction. On appelle alors $\mathcal{U}$-ensemble, ou simplement *petit ensemble* en laissant $\mathcal{U}$ implicite, un élément de $\mathcal{U}$.

1.3.2 La catégorie des petits ensembles

Dans tout ce qui suit, on suppose que $\mathcal{U}$ est un univers donné. On définit la catégorie des petits ensembles comme $\mathbf{Sets} = \mathbf{Ens}(\mathcal{U})$. Ses objets sont les ensembles, et ses flèches les fonctions.

1.3.3 Les catégories algébriques

On considère dans ces section des variétés, constituées d'algèbres dont les ensembles support sont des petits ensembles. On peut donc parler de l'ensemble des petits groupes, par exemple. Les flèches entre les algèbres de la variété sont prises comme étant des fonctions respectant la structure de la théorie. Par exemple, **Grp** est la catégorie dont les objets sont les groupes et les flèches de $A \to B$ les morphismes de groupe de A vers B. On définit de cette manière :

Mon : la catégorie des monoïdes

Grp : la catégorie des groupes

Ab : la catégorie des groupes Abéliens

Rng : la catégorie des anneaux

AbRng : la catégorie des anneaux Abéliens

$A - \mathbf{Mod}$: la catégorie des A-modules

Plus généralement, pour une signature Σ et une présentation E de Σ-équations :

$\Sigma{-}\mathbf{Alg}$: la catégorie des Σ-algèbres

$\Sigma - E{-}\mathbf{Alg}$: la catégorie des Σ-E-algèbres

De même pour les structures, algèbres définies avec des relations :

POrd : la catégorie des préordres (les flèches sont les fonctions croissantes).

1.3.4 Les catégories topologiques

Top la catégorie des espaces topologiques, avec $f : A \to B$ ssi f est une fonction continue de A dans B. En fait, la théorie des catégories a commencé ses développements à partir de notions topologiques.

Dom la catégorie des domaines de calcul, avec $f : A \to B$ ssi f est une fonction calculable de A dans B. Les domaines sont des demi-treillis complets sous condition, et les fonctions calculables sont des fonctions continues au sens de la topologie induite.

Remarque. Les exemples de grandes catégories sont ceux qui ont motivé le développement de la Théorie des Catégories. L'idée directrice est celle de *morphisme*, c'est-à-dire d'application qui préserve la structure. Pourtant, la formalisation a appauvri cette notion intuitive, en définissant une catégorie comme un simple graphe de flèches : l'idée essentielle de préservation de structure a été complètement évacuée. C'est pour souligner cette difficulté que nous préférons parler de flèche plutôt que de morphisme.

1.4 Foncteurs et transformations naturelles

Nous allons maintenant réfléchir la théorie dans la métathéorie, en considérant la catégorie des catégories.

1.4.1 La catégorie des catégories

On appelle *petite catégorie* une catégorie dont les objets forment un petit ensemble, et pour tous objets A et B les flèches de $A \to B$ forment un petit ensemble. On définit **Cat** comme la catégorie ayant pour objets les petites catégories, et pour flèches les *foncteurs* entre catégories.

Les foncteurs sont définis comme des applications préservant la structure catégorique. C'est-à-dire, si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux catégories, $\mathbb{F}$ est un foncteur de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$, ce qu'on écrit $\mathbb{F}:\mathbb{A} \to \mathbb{B}$, ssi $\mathbb{F}$ associe à tout objet $A:\mathbb{A}$ un objet $\mathbb{F}(A):B$ et à toute flèche $f:\mathbb{A}(A, A')$ une flèche $\mathbb{F}(f):\mathbb{B}(\mathbb{F}(A), \mathbb{F}(A'))$, qui préserve la composition :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\mathrm{id}) &= \mathrm{id} \\ \mathbb{F}(f; g) &= \mathbb{F}(f); \mathbb{F}(g) \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que la composition $\mathbb{F}; \mathbb{G}$ de deux foncteurs (membre à membre) est bien un foncteur, le foncteur identité id étant défini comme l'identité aussi bien sur les objets que sur les flèches.

Plus généralement, on parlera de foncteur entre deux catégories arbitraires (et non seulement petites) lorsque les conditions ci-dessus sont remplies. Remarquez que les composantes d'un foncteur sont des fonctions au sens ensembliste.

1.4.2 Quelques foncteurs remarquables

- Le foncteur *trivial* $\mathbb{N}\mathrm{il}:\mathbb{C} \to \mathbb{1}$ est le seul foncteur de ce type. Il envoie tout objet (resp. flèche) de $\mathbb{C}$ vers l'objet (resp. flèche) unique de $\mathbb{1}$.
- Pour toutes catégories $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$, à tout objet $A:\mathbb{C}$ correspond un foncteur *constant* $\mathbb{C}\mathrm{onst}(A):\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ qui envoie les objets sur A et les flèches sur id_A.
- Soit $\mathbb{C}$ une petite catégorie, A un objet quelconque de $\mathbb{C}$. On définit le foncteur $\mathbb{C}(A, -) : \mathbb{C} \to$ **Sets** qui associe à tout objet $B:\mathbb{C}$ l'ensemble des flèches $\mathbb{C}(A, B)$, et à toute flèche $f:B \to C$ de $\mathbb{C}$ la fonction $f_\bullet:\mathbb{C}(A, B) \to \mathbb{C}(A, C)$ qui envoie une flèche $g:A \to B$ de $\mathbb{C}$ sur la flèche $g; f$.
- Les foncteurs d'*oubli*. Ils sont de type $\mathbb{C}A \to \mathbb{C}B$, où $\mathbb{C}B$ est une catégorie ayant "moins de structure" que $\mathbb{C}A$. Toute structure $A:\mathbb{A}$ est donc aussi une structure de $\mathbb{C}B$, ce qui détermine une injection canonique des objets et des flèches de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$ qu'on appelle foncteur d'oubli. Par exemple, on a un foncteur $\mathbf{Forget}(E - E'):$ $\Sigma - E-\mathbf{Alg} \to \Sigma - E'-\mathbf{Alg}$ lorsque E' est une partie de E. De même $\mathbf{Forget}(\Sigma - \Sigma'):\Sigma-\mathbf{Alg} \to \Sigma'-\mathbf{Alg}$ lorsque Σ' est une partie de Σ. Ainsi le foncteur d'oubli de **Grp** $\to$ **Mon** fait correspondre à tout groupe la structure de monoïde correspondante, en "oubliant" l'opération d'inverse. À l'extrême, $\mathbf{Forget}(E):\Sigma - E-\mathbf{Alg} \to$

$\Sigma-$**Alg** oublie toutes les équations, **Forget**$(\Sigma) : \Sigma-$**Alg** $\to$ **Sets** oublie toutes les opérations, et leur composition **Forget** $: \Sigma - E-$**Alg** $\to$ **Sets** oublie toute la structure, en associant à une Σ-E-algèbre son support, et à un Σ-E-morphisme la fonction ensembliste associée.

- Pour les deux cas dégénérés de catégorie, un foncteur entre deux préordres est une fonction monotine, et un foncteur entre deux monoïdes est un morphisme de monoïde. Pour toute catégorie $\mathbb{A}$ on peut définir un préordre **A** sur ses objets par $A \leq B$ ssi il existe une flèche dans $A \to B$. On peut alors définir un foncteur d'oubli de $\mathbb{A}$ vers **Pre**(A), qui consiste à oublier les preuves de $\leq$, et à ne garder que la prouvabilité.
- Pour toute catégorie $\mathbb{C}$, les objets (resp. flèches) de $\mathbb{C}$ sont en bijections avec les foncteurs de $\mathbb{1}$ (resp. $\mathbb{2}$) vers $\mathbb{C}$.

Les foncteurs vont être internalisés en tant qu'objets à leur tour.

1.4.3 Catégories de foncteurs

Étant données deux catégories $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, on forme la catégorie $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ dont les objets sont les foncteurs de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$, et les flèches les morphismes de foncteurs, appelées transformations naturelles. Plus précisement, si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des foncteurs de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$, on appelle *transformation naturelle* de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{G}$ toute application $\mathbb{T}$ qui fait correspondre à un objet $A : \mathbb{A}$ une flèche $\mathbb{T}_A : \mathbb{F}(A) \to \mathbb{G}(A)$ telle que pour toute flèche $f : A \to B$ de $\mathbb{A}$ on ait :

$$\mathbb{T}_A ; \mathbb{G}(f) = \mathbb{F}(f) ; \mathbb{T}_B$$

On note $\mathbb{T} : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$. Si l'on pense à $\mathbb{F}$ comme donnant une image de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$, la transformation $\mathbb{T}$ donne une traduction de l'image de $\mathbb{F}$ dans l'image de $\mathbb{G}$, comme le suggère la figure suivante :

figure figure

Notez que les transformations naturelles se composent naturellement, avec $(\mathbb{T} ; \mathbb{T}')_A = \mathbb{T}_A ; \mathbb{T}'_A$, ce qui montre que $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ est bien une catégorie, avec $(\mathrm{id}_{\mathbb{F}})_A = \mathrm{id}_{\mathbb{F}(A)}$.

On note le rôle double d'un foncteur de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$, qui peut être considéré comme une flèche de $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ dans **Cat**, ou comme un objet de la catégorie $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Cette ambiguïté n'est pas gênante, c'est même une des forces de la notation. Une autre convention usuelle est de confondre l'objet A avec l'identité id_A. Notez que la notation $\mathbb{F}(A)$ devient ambigüe, mais de façon compatible avec cette convention, puisque $\mathbb{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathbb{F}(A)} = \mathbb{F}(A)$. On peut identifier de même la catégorie $\mathbb{C}$ avec le foncteur $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, et le foncteur $\mathbb{F}$ avec la transformation naturell identité $\mathrm{id}_{\mathbb{F}}$, qui associe à un objet A l'objet $\mathbb{F}(A)$, vu comme la flèche $\mathrm{id}_{\mathbb{F}(A)}$.

Lorsque les "flèches polymorphes" de notre formalisation ont des domaines et codomaines qui représentent des foncteurs, on obtiendra en général des transformations naturelles. Par exemple, la flèche polymorphe id de toute catégorie peut être maintenant comprise comme la transformation naturelle : $\mathrm{id}_{\mathrm{id}}$.

D'ailleurs à toute flèche $f : A \to B$ d'une catégorie $\mathbb{C}$ quelconque correspond une transformation naturelle $\mathbb{C}\mathrm{onst}(f)$ qui envoie tout objet sur f.

Exercice 1. Vérifier que $\mathbb{C}\mathrm{onst}$ (dont la partie objet a été définie en 4.2.) est un foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1.5 Quelques transformations naturelles remarquables

Préordres

Un foncteur entre deux préordres est une fonction monotone. Une transformation naturelle entre deux telles fonctions $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ existe si et seulement si on a $\mathbb{F} \leq \mathbb{G}$ avec l'ordre étendu point à point.

Monoïdes

Un foncteur entre deux monoïdes est un homomorphisme. Une transformation naturelle entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ exprime que les éléments $\mathbb{F}(f)$ et $\mathbb{G}(f)$ sibt *conjugués*. définition ? définition ?

Déterminants

Soit M une matrice carrée de dimension n dans l'anneau Abélien $\mathbf{A}$. L'ensemble de telles matrices non singulières forme le groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbf{A})$. Si $\mathbf{A}^\star$ est le groupe des unités de $\mathbf{A}$, M est non singulière si et seulement si son déterminant $\mathbf{D}_\mathbf{A}(M)$ appartient à $\mathbf{A}^\star$, et $\mathbf{D}_\mathbf{A} : \mathbf{GL}_n(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}^\star$ est une flèche de $\mathbf{Grp}$. On peut alors "voir" le déterminant comme une transformation naturelle $\mathbf{D} : \mathbf{GL}_n \to -^\star$ dans la catégorie de foncteurs $\mathbf{AbRng} \to \mathbf{Grp}$.

1.6 Diagrammes catégoriques

1.6.1 Définition d'un diagramme commutant

Souvent une propriété catégorique est exprimée par un *diagramme* : on dessine un graphe dont les sommets sont étiquetés par des objets et les arcs (orientés) sont étiquetés par des flèches. Dire que le diagramme *commute*, c'est exprimer toutes les égalités entre les expressions formées en composant les flèches sur deux chemins du graphe de même orgine et même extrémité. Par convention, on exige que l'un au moins des chemoins soit de longueur supérieure à 1.

Un diagramme catégorique ou commutant équivaut donc à un ensemble d'*équations* entre flèches. Il faut remarquer que cette représentation bi-dimensionnelle d'égalités donctionnelles est au cœur de la discipline. Historique le *concept* de catégorie est issu de la *notation* flèche utilisée pour indiquer le type d'une fonction $f : A \to B$.

N.B. Nous disons diagramme *commutant* et non commutatif, pour ne pas prêter à confusion : le fait qu'un diagramme commute n'a rien à voir avec une propriété de commutativité d'un opérateur.

1.6.2 Exemple : Prod

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\mathsf{Fst}"'] \arrow[dr, "\mathsf{Snd}"] & \\
A & & B \\
& D \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, "\langle f, g\rangle"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

exprime que $f : D \to A$, $g : D \to B$, $\mathsf{Fst} : C \to A$, $\mathsf{Snd} : C \to B$ et $\langle f, g\rangle : D \to C$ vérifient les équations :

$$\langle f, g\rangle ; \mathsf{Fst} = f$$
$$\langle f, g\rangle ; \mathsf{Snd} = g$$

En général, le diagramme spécifie l'*existence* d'une flèche le faisant commuter. Quelquefois, on postule aussi l'*unicité* de cette flèche. Ceci revient souvent à poser une équation supplémentaire. Par exemple, si dans le diagramme ci-dessus on postule que pour tous f et g la flèche $\langle f, g\rangle$ est unique, on obtient une troisième équation avec une variable $h : D \to C$ universellement quantifiée :

$$\langle h; \mathsf{Fst}, h; \mathsf{Snd}\rangle = h$$

1.6.3 Quelques secrets cachés

Nous venons de voir que les diagrammes catégoriques peuvent exprimer de façon concise des définitions. Ils servent souvent également à exprimer des preuves. La méthode générale est la suivante : on écrit la propriété rechercheée sous la forme de diagramme, qu'on décompose en sous-diagrammes plus simples. On prouve indépendamment la commutation des sous-diagrammes, ce qui prouve la propriété par recomposition. Cette recomposition, implicite, est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1. *Si les sous diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "f'"] \\ \cdot \arrow[r, "g'"'] & \cdot \end{tikzcd} \quad et \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & \cdot \arrow[d, "h'"] \\ \cdot \arrow[r, "f''"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

commutent, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "g;h"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g';h'"] \\ \cdot \arrow[r, "f''"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

commute aussi.

Démonstration. Triviale, par associativité de “;”. □

Corollaire 1. *La commutation d'un diagramme peut être inférée de la commutation de ses sous-diagrammes les plus internes.*

Une autre remarque importante est que les foncteurs, en tant que transformations de diagrammes, préservent la commutation (mais pas en général les propriétés d'unicité).

On fait souvent référence à la Théorie des Catégories comme étant triviale, ou développant des abstractions vides de contenu (abstract nonsense). En fait, c'est la grande force de cette théorie que d'abstraire une fois pour toutes les trivialités conséquences de l'associativité de la composition d'opérateurs. La généralités de ces constructions lui donne un rôle à part en Mathématiques, comme Langage de l'Algèbre Universelle.

L'idée la plus importante du point de vue méthodologique est la méthode de preuve par diagrammes. Il s'agit de preuves équationnelles sur des expressions fonctionnelles (dénotant des flèches) avec associativité de la composition implicitie. Les sous-diagrammes factorisent l'utilisation de lemmes dans les preuves. Peut être convient-il de souligner cet aspect méthodologique, généralement passé sous silence dans les manuels :

Le raisonnement diagrammatique permet de faire simplement des preuves équationnelles compliquées, en utilisant une structure de données de graphes partagés pour représenter les termes et les preuves.

Il faut aussi dissiper un malentendu fréquant : la Théorie des Catégories ne prétend pas se substituer à la Théorie des Ensembles pour servir de fondements aux Mathématiques. Au contraire, la discussion sur les petites et grandes catégories a montré que les problèmes de fondement se posaient avec acuité pour justifier des constructions telles que **Cat**. Signalons que la Théorie des Ensembles peut se reconstruire dans un cadre catégorique. C'est l'objet de la Théorie des Topos, qui sort du cadre de ces notes, et pour laquelle nous renvoyons aux ouvrages de Goldbatt et de Barr et Wells.

1.6.4 Un exemple plus avancé : la Loi d'Échange

Soit $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux catégories, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux foncteurs de $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$. Rappelons la propriété caractéristique d'une transformation naturelle $\mathbb{T} : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$, exprimée maintenant sous forme d'un diagramme commutant :

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \\
B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}(A) \arrow[r, "\mathbb{T}_A"] \arrow[d, "\mathbb{F}(f)"'] & \mathbb{G}(A) \arrow[d, "\mathbb{G}(f)"] \\
\mathbb{G}(B) \arrow[r, "\mathbb{T}_B"'] & \mathbb{G}(B)
\end{tikzcd}
$$

$$\mathbb{A} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{B}$$

Si on considère une autre transformation naturelle $\mathbb{U} : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ avec $\mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{H} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, nous avons vu qu'on pouvait définir une composition ";" qui définit une transformation naturelle $\mathbb{T}; \mathbb{U} : \mathbb{F} \to \mathbb{H}$. Considérons maintenant une troisième catégorie $\mathbb{C}$, deux foncteurs $\mathbb{F}', \mathbb{G}' : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$, et une transformation nautrelle $\mathbb{T}' : \mathbb{F}' \to \mathbb{G}'$. La composition ";" est *verticale* dans le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbb{A} \arrow[r, bend left=60, "\mathbb{F}"] \arrow[r, "\mathbb{G}" description] \arrow[r, bend right=60, "\mathbb{H}"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\mathbb{T}"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\mathbb{U}"] \arrow[r, phantom, shift left=1ex, xshift=4ex, "\mathbb{T};\mathbb{U}"] & \mathbb{B} \arrow[r, bend left=60, "\mathbb{F}'"] \arrow[r, bend right=60, "\mathbb{G}'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mathbb{T}'"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

mais on peut également concevoir une composition *horizontale* induite par la composition des foncteurs $\mathbb{F};\mathbb{F}'$ et $\mathbb{G};\mathbb{G}'$. Pour $A\colon\mathbb{A}$ quelconque, le diagramme :

$$\begin{array}{cc}
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}(A) \arrow[d, "\mathbb{T}_A"'] \\
\mathbb{G}(A)
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}'(\mathbb{F}(A)) \arrow[r, "\mathbb{T}_{\mathbb{F}(A)}"] \arrow[d, "\mathbb{F}'(\mathbb{T}_A)"'] & \mathbb{G}'(\mathbb{F}(A)) \arrow[d, "\mathbb{G}'(\mathbb{T}_A)"] \\
\mathbb{F}'(\mathbb{G}(A)) \arrow[r, "\mathbb{T}_{\mathbb{G}(A)}"'] & \mathbb{G}'(\mathbb{G}(A))
\end{tikzcd}
\\
\mathbb{B} & \mathbb{C}
\end{array}$$

commute, puisque $\mathbb{T}'$ est naturelle pour la flèche $\mathbb{T}_A$. On définit la composition horizontale "$*$" comme sa diagonale :

$$\mathbb{T} * \mathbb{T}'_A \triangleq \mathbb{T}'_{\mathbb{F}(A)}; \mathbb{G}'(\mathbb{T}_A) = \mathbb{F}'(\mathbb{T}_A); \mathbb{T}'_{\mathbb{G}(A)}$$

On considère maintenant le diagramme suivant, avec $f\colon A \to B$ une flèche quelconque de $\mathbb{A}$:

$$\begin{array}{cc}
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \\
B
\end{tikzcd}
&
\begin{tikzcd}
\mathbb{F}'(\mathbb{F}(A)) \arrow[r, "\mathbb{F}'(\mathbb{T}_A)"] \arrow[d, "\mathbb{F}'(\mathbb{F}(f))"'] & \mathbb{F}'(\mathbb{G}(A)) \arrow[r, "\mathbb{T}'_{\mathbb{G}(A)}"] \arrow[d, "\mathbb{F}'(\mathbb{G}(f))"'] & \mathbb{G}'(\mathbb{G}(A)) \arrow[d, "\mathbb{G}'(\mathbb{G}(f))"] \\
\mathbb{F}'(\mathbb{F}(B)) \arrow[r, "\mathbb{F}'(\mathbb{T}_B)"'] & \mathbb{F}'(\mathbb{G}(B)) \arrow[r, "\mathbb{T}'_{\mathbb{G}(B)}"'] & \mathbb{G}'(\mathbb{G}(B))
\end{tikzcd}
\\
\mathbb{A} & \mathbb{C}
\end{array}$$

Le carré de gauche commute car $\mathbb{T}$ est naturelle et $\mathbb{F}'$ est un foncteur, et celui de droite commute aussi car $\mathbb{T}'$ est naturelle pour la flèche $\mathbb{G}(f)$. Le diagramme global commute donc, ce qui montre que $\mathbb{T} * \mathbb{T}'$ est bien une transformation naturelle :

$$\mathbb{T} * \mathbb{T}' \colon \mathbb{F}; \mathbb{F}' \to \mathbb{G}; \mathbb{G}'$$

Exercice 2. Montrer par raisonnement diagrammatique que $*$ est une loi associative, qui vérifie avec ; la propriété suivante.

Loi d'échange :

$$(\mathbb{T} * \mathbb{T}'); (\mathbb{U} * \mathbb{U}') = (\mathbb{T}; \mathbb{U}) * (\mathbb{T}'; \mathbb{U}')$$

Remark 1. La composition horizontale avec l'identité donne :

$$(\mathbb{T} * \mathbb{F})_A = \mathbb{T}_{\mathbb{F}(A)}$$
$$(\mathbb{F} * \mathbb{T})_A = \mathbb{F}(\mathbb{T}_A)$$

Pour cette raison, on appelle parfois $*$ l'*application*.

1.7 Épi, mono, iso et autres définitions indigestes

La flèche $f : A \to B$ est un *épi* ssi :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \end{tikzcd} \qquad \text{entraîne } g = h$$

Par exemple, dans **Sets**, les épis sont les surjections. Remarquez l'utilité de la convention de non-trivialité dans la définition de diagramme commutant : le diagramme de gauche dit $f ; g = f ; h$, mais $g = h$ bien sûr.

La flèche $f : B \to A$ est un *mono* ssi :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd} \qquad \text{entraîne } g = h$$

Par exemple dans **Sets**, les monos sont les injections. Notez que si on écrit le diagramme de gauche comme :

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f"'] & C \arrow[l, shift right, "g"'] \arrow[l, shift left, "h"] \end{tikzcd}$$

on remarque l'analogie avec la condition épi ; le diagramme est identique, à l'orientation des flèches près. Cette idée importante de *dualité* sera explicitée dans la section suivante, de manière à exploiter systémantiquement de telles analogies de symétrie.

On dit que la flèche $f : A \to B$ est un *iso* ssi elle est inversible, c'est-à-dire s'il existe une flèche inverse $f' : B \to A$ telle que $f ; f' = \mathrm{id}_A$ et $f' ; f = \mathrm{id}_B$. Un tel f' est unique, et noté f^{-1}. La flèche id est bien sûr un iso, avec $\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id}$. Si f et g sont des isos leur composition l'est aussi, et on a : $(f ; g)^{-1} = g^{-1} ; f^{-1}$. On écrit $f : A = B$ si f est un iso, et occasionnellement on emploie la notation $f : A = B : f^{-1}$.

Attention. Appelons *épimono* une flèche qui est à la fois épi et mono. Dans **Sets**, les épimonos, appelées bijections, sont automatiquement des isos. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, dans $\mathbb{2}$, la flèche "¡" est un épimono, mais n'est pas invertible. Cet exemple montre qu'il faut se méfier des intuitions ensemblistes, et qu'une conjecture catégorique doit être testée sur les petites catégories et les cas dégénérés (monoïdes, préordres, catégories finies) aussi bien que sur les grandes catégories des fonctions.

Deux objets A et B sont dits *isomorphes* s'il existe un iso $f : A = B$. En particulier, deux catégories $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont isomorphes s'il existe un foncteur invertible $\mathbb{F} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$. De manière équivalente, $\mathbb{F}$ est une bijection sur les objets comme sur les flèches. On écrit également dans ce cas $\mathbb{F} : \mathbb{A} = \mathbb{B}$.

Une transformation naturelle $\mathbb{T}:\mathbb{F}\to\mathbb{G}$, avec $\mathbb{F},\mathbb{G}:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ est appelée *isomorphisme naturel* ssi pour tout $A:\mathbb{A}$ la composante $\mathbb{T}_A:\mathbb{F}(A)\to\mathbb{G}(A)$ est un iso de $\mathbb{B}$. On écrit dans ce cas $\mathbb{T}:\mathbb{F}=\mathbb{G}$. Les inverses des composantes définissenet alors un isomorphisme naturel $\mathbb{T}^{-1}:\mathbb{G}=\mathbb{F}$.

Les isomorphismes naturels sont donc exactement les flèches de $\mathbb{F}\to\mathbb{G}$ qui sont des isos. Par exemple $\mathbb{C}\mathrm{onst}(f)$ est un isomorphisme naturel ssi f est un iso.

Nous verrons plus loin que les termes d'une théorie équationnelle peuvent être vus comme des foncteurs. Les équations sont alors des isomorphismes naturels, ce qui justifie notre notation.

Un foncteur $\mathbb{F}:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ est dit *plein* ssi pour toute paire A,B d'objets de A et pour toute flèche $g:\mathbb{F}(A)\to\mathbb{F}(B)$ de $\mathbb{B}$ il existe une flèche $f:A\to B$ de $\mathbb{A}$ telle que $g=\mathbb{F}(f)$. Un foncteur $\mathbb{F}:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ est dit *fidèle* ssi pour toute paire A,B d'objets de $\mathbb{A}$ et pour toute paire de flèches $f,g:A\to B$ de $\mathbb{A}$ l'égalité $\mathbb{F}(f)=\mathbb{F}(g)$ de flèches de $\mathbb{F}(A)\to\mathbb{F}(B)$ dans $\mathbb{B}$ entraîne $f=g$. Par exemple, tout foncteur d'oubli est fidèle. Dans **Cat**, $\mathbb{F}$ est fidèle ssi c'est un mono. Les deux propriétés "plein" et "fidèle" sont fermées par composition.

Une *sous-catégorie* $\mathbb{B}$ d'une catégorie $\mathbb{A}$ est une catégorie constituée de certains de ses objets et flèches, et qui a une composition compatible. Le foncteur d'*injection* $\mathbb{J}:\mathbb{B}\to\mathbb{A}$ est fidèle, comme l'est tout foncteur d'oubli. S'il est aussi plein, on dit que $\mathbb{B}$ est une *sous-catégorie pleine* de $\mathbb{A}$; dans ce cas $\mathbb{B}$ est complètement caractérisée par le sous-ensemble d'objets de $\mathbb{A}$ choisi.

Finalement, une *équivalence* entre deux catégories $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ est déterminée par deux foncteurs $\mathbb{F}:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ et $\mathbb{G}:\mathbb{B}\to\mathbb{A}$, avec deux isomorphismes naturels $\mathbb{T}:\mathbb{F};\mathbb{G}=\mathbb{A}$ et $\mathbb{U}:\mathbb{G};\mathbb{F}=\mathbb{B}$. Cette notion permet de comparer des catégories semblables mais de tailles différentes.

1.8 Constructions de catégories

1.8.1 Dualité

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie arbitraire. On obtient la catégorie *duale* $\mathbb{C}^{\mathrm{o}}$ en renversant toutes les flèches de $\mathbb{C}$, les objets restant les mêmes. C'est-à-dire $A:\mathbb{C}^{\mathrm{o}}$ ssi $A:\mathbb{C}$, et $f^{\mathrm{o}}:A\to B$ dans $\mathbb{C}^{\mathrm{o}}$ ssi $f:B\to A$ dans $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{id}^{\mathrm{o}}=\mathrm{id}$ et $(f;g)^{\mathrm{o}}=g^{\mathrm{o}};f^{\mathrm{o}}$. On a bien sûr $(\mathbb{C}^{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}}=\mathbb{C}$.

À toute propriété catégorique P on peut associer la propriété duale P^{o} qui est vraie pour $\mathbb{C}^{\mathrm{o}}$ ssi P est vraie pour $\mathbb{C}$. Le diagramme de P^{o} est obtenu simplement en renversant les flèches du diagramme de P.

Par exemple, on dit que $\mathbb{0}$ est un object *initial* de la catégorie $\mathbb{C}$ ssi pour tout objet $A:\mathbb{C}$ il existe une flèche unique dans $\mathbb{0}\to A$. La définition duale s'énonce donc : $\mathbb{1}$ est un objet co-initial ou *terminal* de $\mathbb{C}$ ssi pour tout objet $A:\mathbb{C}$ il existe une flèche unique dans $A\to\mathbb{1}$. On vérifie bien que $\mathbb{0}$ est initial dans $\mathbb{C}$ ssi il est terminal dans $\mathbb{C}^{\mathrm{o}}$.

Attention. Si la proposition implique plusieurs catégories et des foncteurs, il faut renverser par dualité les flèches mais *pas* les foncteurs.

À tout foncteur $\mathbb{F} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ correspond un foncteur $\mathbb{F}^o : \mathbb{A}^o \to \mathbb{B}^o$, avec $\mathbb{F}^o(A) = \mathbb{F}(A)$ et $\mathbb{F}^o(f) = (\mathbb{F}(f^o))^o$. On vérifie que $\mathbb{F}^o(\mathrm{id}) = (\mathbb{F}(\mathrm{id}))^o = \mathrm{id}^o = \mathrm{id}$ et $\mathbb{F}^o(f;g) = (\mathbb{F}((f;g)^o))^o = \mathbb{F}((g^o;f^o)^o) = (\mathbb{F}(g^o);\mathbb{F}(f^o))^o = \mathbb{F}((f^o)^o);\mathbb{F}((g^o)^o) = \mathbb{F}^o(f);\mathbb{F}^o(g)$

Par contre, l'opérateur "$-^o$" lui-même n'est pas directement un foncteur, puisqu'il renverse le sens des flèches. On appelle *foncteur contravariant* de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$ un foncteur de $\mathbb{A}^o$ vers $\mathbb{B}$. On peut maintenant considérer "$-^o$" comme le foncteur de contravariant identité. Lorsque la confusion est possible, on parlera de *foncteur covariant* pour un foncteur direct.

Par exemple, le foncteur *flèche* $\mathbb{C}(A,-)$ vu en Section 1.4.2 est covariant. On peut définir de façon symétrique un foncteur contravariant de $\mathbb{C}$ vers **Sets**. Le foncteur *flèche*^{o} $\mathbb{C}(-,B) : \mathbb{C}^o \to \mathbf{Sets}$ associe à tout objet $A:\mathbb{C}$ l'ensemble des flèches $\mathbb{C}(A,B)$ et à toute flèche $f:C \to A$ de $\mathbb{C}$ la fonction $f^* : \mathbb{C}(A,B) \to \mathbb{C}(C,B)$ qui envoie une flèche $g:A \to B$ de $\mathbb{C}$ sur la flèche $f;g$.

1.8.2 Représentations : le Lemme de Yoneda

Tout monoïde peut être considéré comme une catégorie. Un foncteur de $\mathbf{Mon} \to \mathbf{Sets}$ associe à un monoïde $\mathbf{M}$ un ensemble A et à un élément x de $\mathbf{M}$ son *action* sur A. Plus généralement, pour une catégorie arbitraire $\mathbb{C}$, on peut considérer la catégorie des foncteurs $\mathbb{C} \to \mathbf{Sets}$ comme l'espace des *représentations* de la catégorie $\mathbb{C}$.

Dans cette catégorie de représentations, les foncteurs flèches $\mathbb{C}(A,-)$ définissent une sous-catégorie qui représente fidèlement $\mathbb{C}$ dans le sens suivant.

On définit l'*application de Yoneda* $\mathbb{Y}$ qui associe à l'objet $C : \mathbb{C}$ le foncteur flèche $\mathbb{Y}(C) = \mathbb{C}(C,-)$ et à la flèche $f:A \to B$ de $\mathbb{C}$ la transformation naturelle $\mathbb{Y}(f):\mathbb{C}(B,-) \to \mathbb{C}(A,-)$ telle que $\mathbb{Y}(f)(C)$ associe à la flèche $h:\mathbb{C}(B,C)$ la flèche $f;h:\mathbb{C}(A,C)$.

Lemme 2 (Yoneda)**.** $\mathbb{Y}$ *est un foncteur contravariant, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{Y} : \mathbb{C}^o \to (\mathbb{C} \to \mathbf{Sets})$$

De plus, $\mathbb{Y}$ *est plein et fidèle.*

De manière duale, l'application $\mathbb{Z}$ qui associe à l'objet $C:\mathbb{C}$ le foncteur flèche^o $\mathbb{Z}(C) = \mathbb{C}(-,C)$ et à la flèche $f : A \to B$ de $\mathbb{C}$ la transformation naturelle $\mathbb{Z}(f) : \mathbb{C}(-,A) \to \mathbb{C}(-,B)$ telle que $\mathbb{Z}(f)(C)$ associe à la flèche $h : \mathbb{C}(C,A)$ la flèche $h;f : \mathbb{C}(C,B)$ est un foncteur plein et fidèle :

$$\mathbb{Z} : \mathbb{C} \to (\mathbb{C}^o \to \mathbf{Sets})$$

1.8.3 Produit

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux catégories. On définit la catégorie $\mathbb{A}\&\mathbb{B}$ *produit* de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ en prenant pour objets les paires (A, B) avec $A : \mathbb{A}$ et $B : \mathbb{B}$ et pour flèches de (A, B) vers (C, D) les paires (f, g) avec $f : A \to C$ flèche de $\mathbb{A}$ et $g : B \to D$ flèche de $\mathbb{B}$.

On peut définir des foncteurs de projection $\mathsf{Fst} : \mathbb{A}\&\mathbb{B} \to \mathbb{A}$ et $\mathsf{Snd} : \mathbb{A}\&\mathbb{B} \to \mathbb{B}$. Par exemple, $\mathsf{Fst}(A, B) = A$ et $\mathsf{Fst}(f, g) = f$, et symétriquement pour Snd. De plus, Fst et Snd sont "universels" dans le sens suivant. Pour toute catégorie $\mathbb{C}$ et tous foncteurs $\mathbb{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{A}$ et $\mathbb{G} : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$, il existe un foncteur unique $\mathbb{H} : \mathbb{C} \to \mathbb{A}\&\mathbb{B}$ tel que $\mathbb{H}; \mathsf{Fst} = \mathbb{F}$ et $\mathbb{H}; \mathsf{Snd} = \mathbb{G}$. En effet, on doit avoir $\mathbb{H}(C) = (\mathbb{F}(C), \mathbb{G}(C))$ pour tout $C : \mathbb{C}$ et $\mathbb{H}(h) = (\mathbb{F}(h), \mathbb{G}(h))$ pour tout $h : \mathbb{C} \to \mathbb{A}\&\mathbb{B}$, ce qui détermine $\mathbb{H}$. On vérifie que $\mathbb{H}$ est bien un foncteur, que nous noterons $\langle \mathbb{F}, \mathbb{G} \rangle$. On remarque que le diagramme 1.1 vu en Section 1.6.2 est vérifié dans **Cat**.

On peut maintenant définir le *produit* $\mathbb{F}\&\mathbb{G}$ de deux foncteurs $\mathbb{F} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ et $\mathbb{G} : \mathbb{A}' \to \mathbb{B}'$ comme le foncteur unique qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\mathbb{F}"'] & A\&A' \arrow[l, "\mathsf{Fst}"'] \arrow[r, "\mathsf{Snd}"] \arrow[d, "\mathbb{F}\&\mathbb{G}"'] & A' \arrow[d, "\mathbb{G}"] \\
B & B\&B' \arrow[l, "\mathsf{Fst}"] \arrow[r, "\mathsf{Snd}"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Cat

Autrement dit, on définit :

$$\mathbb{F}\&\mathbb{G} = \langle \mathsf{Fst}; \mathbb{F}, \mathsf{Snd}; \mathbb{G} \rangle$$

On a donc construit un double produit, qui envoie une paire de catégories $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ sur $\mathbb{A}\&\mathbb{B}$, et une paire de foncteurs $(\mathbb{F}, \mathbb{G})$ sur $\mathbb{F}\&\mathbb{G}$. Comme l'opérateur "&" vérifie les équations fonctorielles, on peut le considérer comme un foncteur $\& : \mathbf{Cat}\&\mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$. Autrement dit, grâce au produit de catégories nous avons maintenant la notion de foncteur en plusieurs variables.

La construction de produit est similaire au produit cartésien de **Sets**, au produit direct de **Grp**, à la topologie produit de **Top**, etc.C'est donc une construction qu'on peut abstraire au niveau catégorique, comme nous le verrons au Chapitre 2.

1.8.4 Exponentiation

C'est la construction de la catégorie des foncteurs $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ que nous avons déjà vue en Section **??**. Ses objets sont les foncteurs de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$, et ses flèches sont les transformations naturelles.

Cette construction définit elle-même un foncteur covariant en $\mathbb{B}$ et contravariant en $\mathbb{A}$, que l'on note $\rightarrow: \mathbf{Cat}^{o} \& \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$. Nous connaissons déjà sa partie objet, $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$, qui est la catégorie des foncteurs entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Il nous reste à comprendre sa partie flèche.

Soit $\mathbb{F} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ et $\mathbb{G} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ deux foncteurs arbitraires. On définit le foncteur $\mathbb{F} \to \mathbb{G}$ entre les catégories $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ et $\mathbb{A}' \to \mathbb{B}'$ comme suit. Sa partie objet fait correspondre au foncteur $[\to H] : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ le foncteur $\mathbb{F}; \mathbb{H}; \mathbb{G} : \mathbb{A}' \to \mathbb{B}'$. Sa partie flèche associe à la transformation naturelle $\mathbb{T} : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ avec $\mathbb{H}, \mathbb{K} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, la transformation naturelle $\mathbb{U} = \mathbb{F}; \to [T]; \mathbb{G}$.

Attention. Dans la dernière expression, $\mathbb{F}$ dénote la partie objet du foncteur $\mathbb{F}$, tandis que $\mathbb{G}$ dénote la partie flèche de $\mathbb{G}$. La composition a son sens ensembliste : $\mathbb{U}$ associe l'objet X de $\mathbb{A}'$ la flèche $\mathbb{G}(\mathbb{T}_{\mathbb{F}(X)})$ de $\mathbb{B}'$.

Exercice 3. Démontrez que $\mathbb{U}$ est bien une transformation naturelle entre les foncteurs $\mathbb{F}; \mathbb{H}; \mathbb{G}$ et $\mathbb{F}; \mathbb{K}; \mathbb{G}$.

2 Constructions universelles

2.1 Concept d'universalité

Nous sommes passés de la notion de flèche à celle de foncteur par un principe de réflexion entre une catégorie arbitraire $\mathbb{A}$ et la catégorie **Cat**. Puis nous avons vu un certain nombre de constructions de catégories. On utilise maintenant le prinicpe de réflexion dans le sens inverse pour dégager des *constructions universelles* dans une catégorie $\mathbb{A}$ donnée.

Par exemple, un *groupoïde* est une catégorie telle que toute flèche est un iso. Tout comme une catégorie pouvait être considérée comme l'espace des preuves d'un préordre, un groupoïde peut être vu comme espace des preuves d'une relation d'équivalence. Dans le cas d'un objet unique, on retrouve le concept familier de groupe.

2.2 Objet terminal, objet initial

À partir de maintenant, on se place dans une catégorie arbitraire.

2.2.1 Objet terminal

Un objet $\mathbb{1}$ est dit *terminal* ssi pour tout objet A il existe une flèche unique $\mathsf{Nil} : A \to \mathbb{1}$.

La propriété fondamentale dans la définition ci-dessus est bien sûr l'unicité de la flèche. Il peut y avoir plusieurs objets terminaux, mais si $\mathbb{1}$ et $\mathbb{1}'$ sont terminaux, la flèche $\mathsf{Nil} : \mathbb{1} \to \mathbb{1}'$ est un iso ; l'objet terminal est donc unique, à isomorphisme près.

Donnons quelques exemples de catégories admettant des objets terminaux.

— Pour un préordre, un objet est terminal ssi c'est un élément maximum
— Pour un monoïde, seul le monoïde trivial $\mathbb{1}$ réduit à l'unité $\{1\}$ admet un objet terminal $\mathbb{1}$.
— **Mon** : $\mathbb{1}$ est terminal
— **Sets** : tout ensemble singleton est terminal
— **Cat** : $\mathbb{1}$ est la catégorie terminale

2.2.2 Objet initial

Par dualité, on obtient la définition d'un objet *initial* $\mathbb{0}$, tel que pour tout objet A il existe une flèche unique $\mathbb{0} \to A$. Par exemple :

— Pour un préordre, un objet est initial ssi c'est un élément minimum
— Pour un monoïde, seul le monoïde trivial $\mathbb{0}$ admet un objet initial $\mathbb{0}$.
— **Mon** : $\mathbb{0}$ est initial

— **Sets** : $\emptyset$ est initial
— **Cat** : $\mathbb{0}$ est la catégorie initiale
— $\Sigma-$**Alg** : $\mathsf{T}(\Sigma)$ est la Σ-algèbre initiale, à isomorphisme près
— $\Sigma-E-$**Alg** : $\mathsf{T}(\Sigma)/=_E$ est la Σ-E-algèbre initiale. Par exemple, le groupe finiment présenté par un ensemble de générateurs G et un ensemble de relations R est obtenu en prenant pour Σ l'union de l'ensemble des opérateurs $\{*, 1, ^{-1}\}$ et des éléments de G pris comme constantes, et pour E l'union de axiomes de groupe et des égalités $r = 1$ pour r dans R.

2.2.3 Éléments

On appelle *élément* de l'objet $A{:}\mathbb{C}$, quand $\mathbb{C}$ admet un objet terminal $\mathbb{1}$, toute flèche $x{:}\mathbb{1} \to A$. On écrit $x{:}A$.

On note que l'ambiguité résultante dans **Cat** n'est pas gênante, car les foncteurs de $\mathbb{1} \to \mathbb{A}$ sont en bijection avec les objets de $\mathbb{A}$: les éléments d'une catégorie sont ses objets ! De même, dans **Sets**, les éléments d'un ensemble au sens catégorique sont ses éléments au sens usuel, ce qui justifie la terminologie.

2.3 Produit et somme catégoriques

2.3.1 Produit : définition

Une catégorie $\mathbb{C}$ admet un *produit* ssi pour tous objeets A, B il existe un objet $A\&B$ et des flèches $\mathsf{Fst}{:}A\&B \to A$ et $\mathsf{Snd}{:}A\&B \to B$ telles que pour tout objet C et pour toutes flèches $f{:}C \to A$ et $g{:}C \to B$ il existe une unique flèche $\langle f, g\rangle{:}C \to A\&B$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A & A\&B \arrow[l, "\mathsf{Fst}"'] \arrow[r, "\mathsf{Snd}"] & B \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\langle f, g\rangle"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

2.3.2 Exemples de produit

Le concept de produit généralise aux catégories le concept familier de borne inférieure. Par exemple, les catégories suivantes admettent des produits :
— Tout préordre qui a la structure d'un inf-demi-treillis. Par exemple, sur $\mathbb{N}$ muni de l'ordre de divisibilité, le pgcd est un produit.
— Le monoïde $\mathbb{1}$ possède trivialement un produit.

Exercice 4. Construire un monoïde sur $\mathbb{N}$ admettant un produit.

— **Sets** : Le produit cartésien $A \times B$ est un produit. Le produit symétrique $B \times A$ en définit un autre. C'est d'ailleurs toujours le cas : $B\&A$ définit un produit symétrique du produit $A\&B$, en renversant les rôles de Fst et Snd. Il faut par contre souligner que le diagramme (2.1) est lui parfaitement symétrique, alors que la définition du produit Cartésien comme l'ensemble des paires d'éléments $\{a, \{a, b\}\}$ ne l'est pas, ce qui montre bien que le produit est une notion de nature catégorique.
— **Grp**, **Top**, … : le produit direct est un produit.

2.3.3 Formalisation : la théorie Prod

Nous allons maintenant écrire formellement la propriété exprimée diagrammatiquement ci-desus. On déclare les *opérateurs* :

$$\& : \mathbb{C}\&\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{Fst} &: A\&B \to A \\ \mathsf{Snd} &: A\&B \to B \\ \langle -, = \rangle &: C \to A, C \to B \vdash C \to A\&B \end{aligned}$$

et les *équations* :

$$\begin{aligned} \mathbf{P1} &: \langle f, g \rangle ; \mathsf{Fst} = f \\ \mathbf{P2} &: \langle f, g \rangle ; \mathsf{Snd} = g \\ \mathbf{UP} &: \langle h ; \mathsf{Fst}, h ; \mathsf{Snd} \rangle = h \end{aligned}$$

Quelques explications complémentaires s'imposent. Tout d'abord, pour les opérateurs. Il y en a deux sortes. L'opérateur & est déclaré comme foncteur, du produit de catégories $\mathbb{C}\&\mathbb{C}$ dans la catégorie $\mathbb{C}$. Ceci nécessite deux vérifications : dans $\mathbb{C}$, que & est bien un foncteur, et dans **Cat**, que le produit & vérifie bien toutes les équations ci-dessus, ce qui justifie la terminologie et les notations.

Ensuite, les opérations de flèches sont déclarés comme opérateurs polymorphes, de types des *séquents* de la forme $M \to N$, où M et N sont des termes composés de foncteurs et d'objets (constantes et variables) de $\mathbb{C}$. Par exemple, Fst et Snd sont des constantes polymorphes en les variables A et B, alors que $\langle -, = \rangle$ est un opérateur binaire polymorphe en A, B et C. La virgule "," et le signe d'inférence "$\vdash$" appartiennent au méta-llangage. Il faut lire une telle déclaration comme une *règle d'inférence* entre schémas de séquents, la flèche "$\to$" étant interprétée comme la déduction logique :

$$\boxed{\dfrac{C \to A \qquad C \to B}{C \to A\&B}\ \&\text{-intro}}$$

et on reconnaît le schéma familier &-intro du calcul intuitioniste des séquents de Gentzen. De même Fst (resp. Snd) correspond à la règle &-Elim gauche (resp. droite).

Enfin, les équations **P1**, **P2** et **UP** contiennent des variables de flèches f, g et h universellement quantifiées, et les types sont implicites. En fait, les déclarations d'opérateurs peuvent être utilisées pour inférer un type principal à tout variable ; par exemple on trouve $h : C \to A\&B$ dans l'équation **UP**, avec A et B deux variables d'objet, c'est-à-dire de type C.

Les équations **P1** et **P2** proviennent de conditions d'existence, et correspondent à la commutation des deux triangles du diagramme (2.1). Ces équations, orientées de la gauche vers la droite, peuvent être considérées comme des *règles de simplification* ; du point de vue logique, ce sont des *coupures* au sens de la théorie de la démonstration, exprimant des détours inutiles dans une preuve. L'équation **UP** provient par contre de l'unicité du produit ; elle exprime une condition de *fermeture*, stipulant que seule la paire peut construire des produits. Cette équation joue un rôle analogue à la clause de complétude d'une définition inductive.

On voit donc que le diagramme (avec la quantification précise de toutes les quantités qui y apparaissent) cache une spécification équationnelle relativement complexe. Toutes les manipulations équationnelles traditionnelles, pourvu qu'elles respectent les types, sont applicables. Par exemple, on peut montrer par raisonnement équationnel les équations dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{IP} &: \langle \mathsf{Fst}, \mathsf{Snd} \rangle = \mathrm{id} \\ \mathbf{DisP} &: h; \langle f, g \rangle = \langle h; f, h; g \rangle \end{aligned}$$

En effet, **IP**se déduit de **Idr**et **UP**, et **DisP**, la distributivité de la composition sur le produit, se déduit de **Ass**, **P1**, **P2**et **UP**. Bien sûr de nouveau les types sont implicites, par exemple $\mathrm{id} : A\&B \to A\&B$ dans **IP**. Ces preuves sont expliquées naturellement par des diagrammes, mais il faut aussi connaître leur explication formelle. Il est intéressant par exemple de noter que l'ensemble $\{\mathbf{Ass}, \mathbf{Idl}, \mathbf{Idr}, \mathbf{P1}, \mathbf{P2}, \mathbf{UP}, \mathbf{IP}, \mathbf{DisP}\}$ forme un ensemble canonique de simplifications, qui détermine une forme normale unique des expressions de flèche dans la théorie **Prods**.

Comme promis, nous donnons maintenant la partie flèche du foncteur &, en définissant :

$$\begin{aligned} \& &: A \to B, C \to D \vdash A\&C \to B\&D \\ D\& &: f\&g = \langle \mathsf{Fst}; f, \mathsf{Snd}; g \rangle \end{aligned}$$

Exercice 5. montrer que & est un bi-foncteur covariant en ses deux arguments, et que dans **Cat** le foncteur & a les bonnes propriétés.

2.3.4 Produits finis

On dit que $\mathbb{C}$ admet des produits finis ssi elle possède un produit et un élément terminal. Ceci revient donc à compléter la théorie équationnelle **Prods** ci-dessus en une théorie **Prods** par les définitions :

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &: \mathbb{C} \\ \mathsf{Nil} &: A \to \mathbb{1} \\ \mathbf{UN} &: h = \mathsf{Nil} \end{aligned}$$

Dans l'équations d'unicité **UN**, on a $h{:}A \to \mathbb{1}$, ce qui empêche la théorie équationnelle d'être triviale. On note la conséquence immédiate de **UN** :

$$\mathbf{NZ}{:}f;\mathsf{Nil} = \mathsf{Nil}$$

qui exprime que Nil est zéro à droite pour la composition, et où f est une flèche arbitraire $f{:}A \to B$.

Avec la paire et Nil on peut maintenant construire des listes, ou n-uplets de flèches. On définit récursivement :

$$\begin{aligned} () &= \mathsf{Nil} \\ (f_n \dots f_2 f_1) &= \langle (f_n \dots f_2), f_1 \rangle \\ \pi_1 &= \mathsf{Snd} \\ \pi_{n+1} &= \mathsf{Fst}; \pi_n \end{aligned}$$

avec les propriétés de projection usuelles. Du point de vue logique, on a maintenant des séquences qui peuvent servir à reprśenter des *séquents* c'est-à-dire des déductions à partir d'une liste d'hypothèses. Mais on a également défini la conjonction & (ce qui justifie la notation), la constante $\mathbb{1}$ représentant pour sa part la valeur de vérité "Vrai".

Plus précisemment, définissons un sous-ensemble C^* d'objets de $\mathbb{C}$, que nous appelerons *contextes* de $\mathbb{C}$. On commence par définir récursivement C^* avec n entier naturel :

$$\begin{aligned} C^0 &= \{1\} \\ C^{n+1} &= \{E\&A \parallel E{:}C^n, A{:}\mathbb{C}\} \end{aligned}$$

Si $E{:}C^n$ on dit que E est un contexte de longeur n, et on écrit $n = |E|$. Si $1 \leq i \leq |E|$, on définit la i-ème composante E_i de E récursivement, par :

$$(E\&A)_i = \begin{cases} A & \text{si } i = 1 \\ E_{i-1} & \text{si } i > i \end{cases}$$

On définit alors C^* comme l'union de tous les C^n. On peut maintenant typer plus précisemment les flèches de projection relativement à un contexte E, que nous écrirons $\pi_E(n){:}E \to E_n$.

On peut bien sûr aussi construire la structure de donnée d'arbre binaire, les fonctions de projection étant maintenant associées à des mots de $\{1,2\}^*$. La notion correspondante de preuve à partir d'un arbre d'hypothèse est moins classique.

Finalement, notons que toute catégorie admettant des produits finis possède un certains nombre d'isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{Fst};\mathsf{Fst}, \langle \mathsf{Fst};\mathsf{Snd}, \mathsf{Snd}\rangle\rangle : (A\&B)\&C &= A\&(B\&C) : \langle\langle \mathsf{Fst}, \mathsf{Snd};\mathsf{Fst}\rangle, \mathsf{Snd};\mathsf{Snd}\rangle \\ \mathsf{Fst}{:}A\&\mathbb{1} &= A{:}\langle \mathrm{id}, \mathsf{Nil}\rangle \\ \mathsf{Snd}{:}\mathbb{1}\&A &= A{:}\langle \mathsf{Nil}, \mathrm{id}\rangle \end{aligned}$$

Exercice 6. Montrer que tout diagramme composé à l'aide des isomorphismes ci-dessus et de leurs inverses, commute. Étudier si cette propriété reste vraie si l'on rajoute l'isomorphisme supplémentaire :

$$\langle \mathsf{Snd}, \mathsf{Fst}\rangle : A\&B = B\&A : \langle \mathsf{Fst}, \mathsf{Snd}\rangle$$

2.3.5 Compilation de la théorie à partir du diagramme

Il est possible de systématiser l'écriture de la théorie équationnelle à partir du diagramme catégorique. Il faut tout d'abort être très soigneux en écrivant complètement le préfixe de quantification des variables utilisées dans le diagramme. On obtient les déclarations de la théorie à partir du préfixe de quantification, qu'on écrit sur deux lignes, en séparant quantifications portant sur des objets de celles portant sur des flèches.

Pour chaque ligne, on *Skolémise*, en remplaçant chaque variable quantifiée existentiellement par une nouvelle constante, appliquée à des arguments qui sont toutes les variables quantifiées universellement qui la précèdent sur la même ligne. Sur la première ligne on obtient les foncteurs, et sur la deuxième les constructeurs de flêches le type de ces dernieres peut être lu sur le diagramme.

Les équations sont obtenues en écriavant les diagrammes commutants les plus internes. On traite les quantifications “Existe h unique t.q. ...” comme “Existe h t.q. ...”, ce qui donne par Skolémisation $H(f_1, \ldots, f_n)$, et on écrit l'équation supplémentaire $H(F_1(h), \ldots, F_n(h)) = h$, où on a remplacé f_i par $F_i(h)$ en utilisant le diagramme.

Exercice 7. Utiliser cette méthode pour obtenir la théorie **Prods**.

La méthode de compilation esquissée ci-dessus est un peu naïve, et il convient de la raffiner pour des propriétés catégoriques plus compliquées. Par exemple, il convient de mettre la formule logique en forme “miniscope”, de manière à ne pas introduire par Skolémisation de dépendance non nécessaire. Par contre, il n'est pas toujours possible de Skolémiser indépendamment les objets et les flèches, lorsque le diagramme exprime une dépendance complexe. Enfin, la théorie obtenue n'est pas toujours simplement équationnelle, et en général on obtient des clauses de Horn, c'est-à-dire des équations conditionnelles de la forme :

$$M_1 = N_1, M_2 = N_2, \ldots, M_n = N_n \Rightarrow M = N$$

2.3.6 Somme ou co-produit

La somme, ou co-produit, est la notion duale de celle de produit. On obtient donc son diagramme en renversant les flèches du diagramme (2.1) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathsf{Inl}"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, "(f \Diamond g)"] & B \arrow[l, "\mathsf{Inr}"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

D'où la théorie :

$$
\begin{aligned}
+ &: \mathbb{C}\&\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
\mathsf{Inl} &: A \to A + B \\
\mathsf{Inr} &: B \to A + B \\
(-\Diamond =) &: A \to C, B \to C \vdash A + B \to C \\
\mathbf{S1} &: \mathsf{Inl}; (f \Diamond g) = f \\
\mathbf{S2} &: \mathsf{Inr}; (f \Diamond g) = g \\
\mathbf{US} &: ((\mathsf{Inl}; h) \Diamond (\mathsf{Inr}; h)) = h
\end{aligned}
$$

On peut penser à l'opérateur $(\Diamond)$ comme le *conditionnel* qui compose deux actions en une. Les opérateurs Inl et Inr sont analogues aux valeurs de vérité utilisées pour choisir une branche ou l'autre du conditionnel.

L'interprétation logique de $+$ est la disjonction intuitionniste. Les opérateurs Inl, Inr et $(\Diamond)$ peuvent être reconnus comme les règles d'inférence $+$-Intro-gauche, $+$-Intro-droite et $+$-Elim respectivement. **S1**et **S2**sont les coupures, et **US**la propriété de clôture.

Il est clair que $\mathbb{C}^o$ admet une somme ssi $\mathbb{C}$ admet un produit, et réciproquement. Donnons quelques exemples familiers de sommes :

— Tout préordre qui a la structure d'un sup-demi-treillis. Par exemple, sur $\mathbb{N}$ muni de l'ordre de divisibilité, la somme est le ppcm.

— $\mathbb{1}$ possède trivialement une somme

— **Sets** : la somme disjointe est une somme, et on peut définir de manière analogue une somme $+$ de catégories dans **Cat**.

— **Grp**, **Top**, ... : la somme directe est une somme.

On peut maintenant montrer que $+$ est un foncteur de $\mathbb{C}\&\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, avec :

$$
\begin{aligned}
+ &: A \to B, C \to D \vdash A + C \to B + D \\
\mathbf{D}+ &: f + g = (f; \mathsf{Inl} \Diamond g; \mathsf{Inr})
\end{aligned}
$$

2.4 Exponentiation

2.4.1 Définition

On se place dans une catégorie $\mathbb{C}$ qui admet un produit $\&$. On dit que $\mathbb{C}$ admet une exponentiation $\Rightarrow$ ssi pour toute paire d'objets $B, C : \mathbb{C}$ il existe un objet $B \Rightarrow C : \mathbb{C}$ tel qu'il existe une flèche $\mathsf{App} : ((B \Rightarrow C)\&B) \to C$ telle que pour tout objet $A : \mathbb{C}$ et pour toute flèche $f : A\&B \to C$ il existe une flèche unique $[]f : A \to (B \Rightarrow C)$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} B \Rightarrow C & B \arrow[rr, "\mathsf{App}"] & & C \\ A \arrow[u, "[]f"] & B \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[urr, "f"'] & & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

On appelle App la flèche d'*application*, et on dit que [] est l'opération d'*abstraction*, qui fait passer d'une flèche binaire f à sa forme *Curryfiée* $[]f$. Une catégorie qui possède les produits finis et l'exponentation est dite *calculatoire*. Les catégories calculatoires sont les catégories d'objets fonctionnels.

La caractéristique principale d'une catégorie calculatoire est que ses flèches sont représentables dans ses objets. Nous verrons en effet que dansune catégorie calculatoire il existe une bijection entre les flèches de $A \to B$ et les éléments de l'objet $A \Rightarrow B$.

Donnons tout d'abord la théorie **Exp** associée à une catégorie calculatoire :

2.4.2 La théorie Exp

Cette théorie est un prolongement de la théorie **Prods** des catégories avec produits finis, dont elle utilise les opérateurs.

$$\begin{aligned} \Rightarrow &: \mathbb{C}^{o} \& \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \mathsf{App} &: A \Rightarrow B \& A \to B \\ [] &: A \& B \to C \vdash A \to B \Rightarrow C \\ \mathbf{EV} &: []f \& \mathrm{id}; \mathsf{App} = f \\ \mathbf{UE} &: [](h \& \mathrm{id}; \mathsf{App}) = h \end{aligned}$$

On reconnaît les règles d'inférence correspondant à l'implication intuitioniste : App est un schéma d'axiome inspiré de la règle Modus Ponens, qui joue ici le rôle de $\Rightarrow$-Elim, alors que l'abstraction [], une forme du théorème de déduction, joue ici le rôle de $\Rightarrow$-Intro.

La règle **EV**, ou règle d'*évaluation*, est la coupure correspondante à $\Rightarrow$. D'un point de vue informatique, il faut voir une flèche $f : A \to B$ comme un programme qui, dans un environnement de type A, donnant des valeurs à ses variables globales, retourne un résultat de type B. Les environnements sont construits naturellement par des produits finis. Une flèche $f : A \& B \to C$ a donc son dernier argument, appelons le x, de type B. Il est possible d'abstraire l'argument x pour produire la *fermeture* $[x]f_x$, représentée par la flèche $[]f : A \to B \Rightarrow C$. En présence de l'argument $X : B$, la paire $([]f, X)$ peut être évaluée dans un environnement de type A pour produire la valeur f_X. C'est précisement le rôle de l'algorithme d'application App, et c'est ce que signifie la règle **EV**. La règle d'unicité de l'exponentiation **UE** est ici encore une condition de complétude, qui dit que seule la règle d'abstraction construit des fermetures, c'est-à-dire des valeurs fonctionnelles.

Cette discussion montre qu'il y a un lien très étroit entre les *algorithmes* d'une théorie calculatoire (les flèches d'une catégorie calculatoire) et les *preuves* d'une logique propositionnelle intuitioniste. Dans notre cadre précis, ces preuves sont les expressions d'un lambda-calcul typé. Nous expliciterons ce lien en **??**, mais tout d'abord donnons quelques conséquences équationnelles de la théorie **Exp** :

$$\begin{aligned} \mathbf{IE}\!:& []\mathsf{App} = \mathrm{id} \\ \mathbf{Red}\!:& ([]f, x); [] = (\mathrm{id}, x); f \\ \mathbf{Dist}[]\!:& f; []g = [](f\&\mathrm{id}; g) \end{aligned}$$

On laisse en exercice la dérivation de ces égalités, et on définit :

$$[]^{-1}f = f\&\mathrm{id}; \mathsf{App}$$

Il est aisé de montrer :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}[]\!:& []^{-1}[]f = [][]^{-1}f = f \\ \mathbf{FI}\!:& \mathsf{App} = []^{-1}\mathrm{id} \end{aligned}$$

et on voit donc que l'opération d'abstraction définit une bijection entre les flèches de $A\&B \to C$ et celles de $A \to B \Rightarrow C$, l'opération d'application correspond à l'identité fonctionnelle.

On peut maintenant montrer que $\Rightarrow$ est un foncteur de $\mathbb{C}^o\&\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, avec :

$$\begin{aligned} \Rightarrow\!:& C \to A, B \to D \vdash A \Rightarrow B \to C \Rightarrow D \\ \mathbf{D}\Rightarrow\!:& f \Rightarrow g = [](\mathrm{id}\&f; \mathsf{App}; g) \end{aligned}$$

Exercice 8. Montrer par raisonnement équationnel la fonctorialité de $\Rightarrow$.

Finalement, on note les isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{id}, \mathbb{N}\mathrm{il}\rangle; \mathsf{App}\!:& T \Rightarrow A = A\!: []\mathsf{Fst} \\ \mathbb{N}\mathrm{il}\!:& A \Rightarrow T = T\!: []\mathbb{N}\mathrm{il} \end{aligned}$$

et on remarque que les flèches de $A \to B$ sont en correspondance avec les éléments de l'object fonctionnel $A \Rightarrow B$, par la bijection ξ définie par $\xi(f) = [](\mathsf{Snd}; f)$. Toute catégorie calculatoire est donc *fermée*, en ce sens que ses flèches sont internalisées en tant qu'éléments d'objects fonctionnels.

En anglais, une catégorie calculatoire est appelée “cartesian closed category”, CCC en abrégé.

2.4.3 Exemples de catégories calculatoires

— **Sets** est une catégorie calculatoire, avec $A \Rightarrow B$ l'ensemble des fonctions de A vers B.

— **Cat** en est une également, avec $A \Rightarrow B$ la catégorie des foncteurs $A \to B$.

Exercice 9. Déterminer le foncteur App, et l'isomorphisme d'abstraction de foncteurs $[]$.

— Un treillis muni d'une élément minimum, considéré en tant que catégorie, est calculatoire si et seulement si c'est une *algèbre de Heyting*, c'est-à-dire un modèle du calcul des propositions intuitioniste. Ce qui motive les considérations logiques suivantes.

2.4.4 Le point de vue logique

Beaucoup d'auteurs confondent les deux flèches, et écrivent $A \to B$ au lieu de $A \Rightarrow B$. Nous préférons distinguer, comm il est d'usage en logique de distinguer entre la flèche de déduction des séquents et la flèche d'implication des propositions, bien que dans le cas intuitioniste ces flèches soient essentiellement les mêmes.

Remarquez que la bijection ξ prouve le *le théorème de déduction* , dans le calcul propositionnel intuitioniste avec conjonction & et vérité 1. Plus précisement, si on se donne un ensemble P de proposition élémentaires, on obtient un calcul propositionnel sur P en considérant la catégorie calculatoire libre sur P, $\mathsf{Exp}(P)$, définie comme objet initial dans la catégorie des catégories calculatoires admettant A comme objet pour tout A dans P. Les flèches de $A \to B$ sont alors les preuves de B à partir de l'hypothèse A. Le quotient par isomorphisme des objets d'une telle catégorie est une *algèbre implicationnelle.* Si P est fini, une telle algèbre est finie, comme l'a montré de Bruijn. Par exemple, pour $P = A(B,)$, on obtient le *cube de Skolem* ci-dessous.

On obtient de manière analogue un calcul intuitioniste complet en se plaçant dans une catégorie calculatoire possédant les sommes finies. L'élément initial $\mathbb{0}$ est la valeur de vérité “Faux”, et la somme + est la disjonction intuitioniste. Le quotient par isomophisme des objets d'une telle catégorie est une algèbre de Heyting. Contrairement au cas précédent, l'algèbre engendrée par un élément inifinie, c'est le *treillis de jardin de Nishimura.*

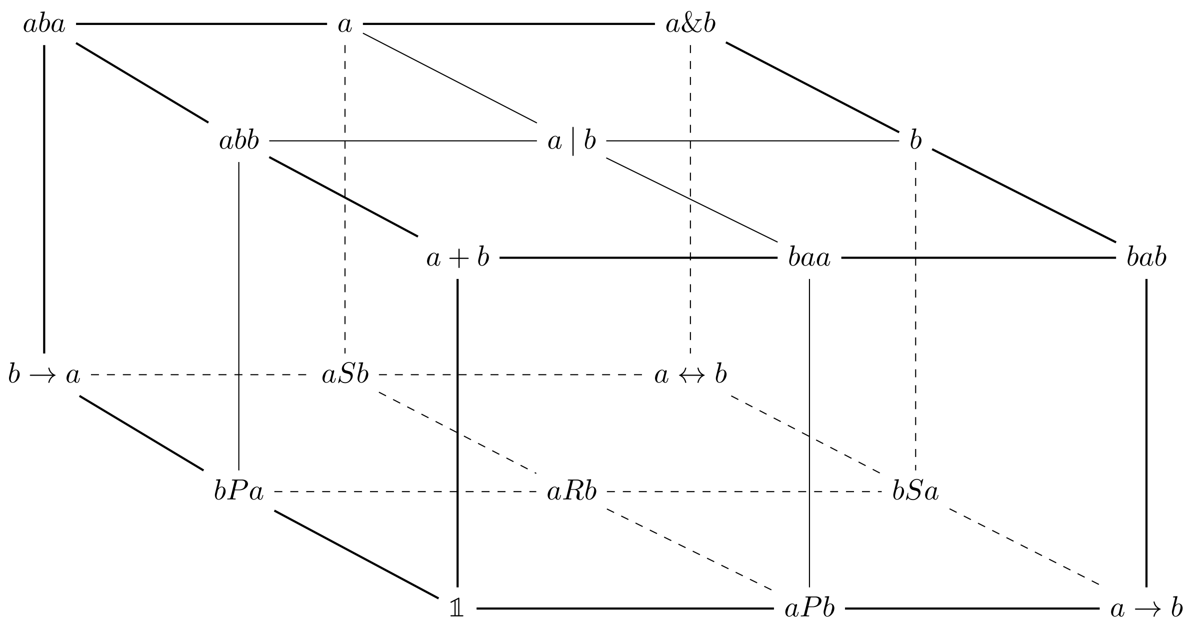
2.4.5 Le point de vue calculatoire

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie calculatoire. Nous allons définir un calcul associé à $\mathbb{C}$ comme suit. On définit récursivement la relation “M est un *terme* de *type* A dans le *contexte* E” avec $A\!:\!\mathbb{C}$ et $E\!:\!\mathbb{C}^*$, ce qu'on écrit $E \vdash M\!:\!A$, par :

Variable : Si $1 \leq n \leq |E|$, alors $E \vdash n\!:\!E_n$

Abstraction : Si $E\&A \vdash M\!:\!B$, alors $E \vdash [A]M\!:\!A \Rightarrow B$

Application : Si $E \vdash M\!:\!A \Rightarrow B$ et $E \vdash N\!:\!A$, alors $E \vdash (MN)\!:\!B$



$$
\begin{aligned}
ab &= a \to b \\
aPb &= abaa \\
aRb &= aPb\&bPa \\
aSb &= abba \\
a \mid b &= abb\&baa \\
a + b &= (a \leftrightarrow b) \to a
\end{aligned}
$$

FIGURE 2.1 – Le cube de Skolem

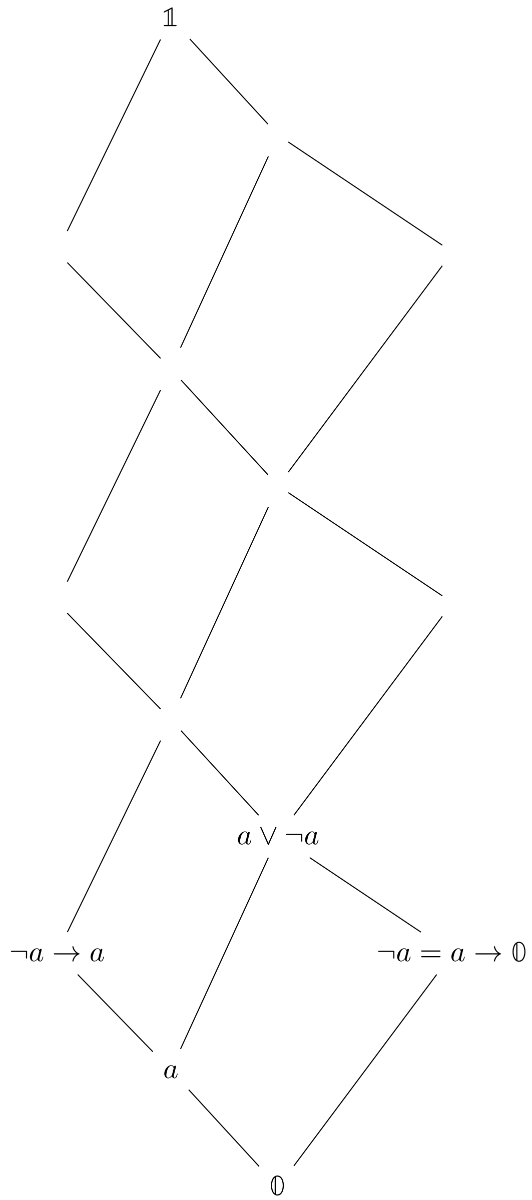


Figure 2.2 – Le treillis de Nishimura

On reconnaît la définition des termes d'un lambda-calcul typé, dans la notation de de Bruijn. Il est commode d'utiliser une représentation concrète de ces termes sous forme de lambda-expressions avec des noms de variables, en associant un nom à chaque opération d'abstraction. Par exemple, le term $[A](1[B](12))$ peut être représenté par l'expression plus lisible $[x : A](x[yB :](y\ x))$. Il est facile de formaliser une telle représntation, nous laissons cet exercice au lecteur. Dans le lambda-calcul originel de Church, on écrivait $\lambda x_A. M$ au lieu de $[x : A]M$ (d'où le nom lambda-calcul).

Nous allons maintenant traduire nos termes par des flèches, en associant à tout terme M, avec $E \vdash M : A$, une flèche $F_E(M) : E \to A$ de $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} F_E(n) &= \pi_E(n) \\ F_E([A]M) &= []F_{E\&A}(M) \\ F_E((MN)) &= \langle F_E(M), F_E(N)\rangle; \mathsf{App} \end{aligned}$$

Exemple 1. L'expression $[f : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}][x : \mathbb{N}](f\ (f\ x))$, correspondant au term $[\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}][\mathbb{N}](2\ (2\ 1))$, de type $(\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N})$ dans le contexte vide $\mathbb{1}$, se traduit en la flèche :

$$[][]\langle \mathsf{Fst}; \mathsf{Snd}, \langle \mathsf{Fst}; \mathsf{Snd}, \mathsf{Snd}\rangle; \mathsf{App}\rangle; \mathsf{App} : \mathbb{1} \to (\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N})$$

L'avantage de l'écrituresous forme de termes est qu'il n'y a jamais de confusion possible des vriables par leur nom : chaque variable est nommée de manière non ambiguéu par la distance â son lieur, c'est-à-dire l'opérateur d'abstraction qui l'introduit. L'inconvénient de cette écriture est qu'il faut explicitier des opérations de relocation pour les termes contenant des variables libres. Par exemple, on efinit pour tout term M le terme M^+ obtenu en augmentant de 1 toutes les références de ses variables libres. Formellement, on a $M^+ = R^0(M)$, avec :

$$\begin{aligned} R^i(k) &= k && \text{si } k < i \\ &= k+1 && \text{si } k \geq i \\ R^i([A]M) &= [A]R^{i+1}(M) \\ R^i((M\ N)) &= (R^i(M)\ R^i(N)) \end{aligned}$$

On définit sur les termes une opération de *substitution* aux variables libres, comme suit. Soit $E \vdash M : A$, et $1 \leq n \leq |E|$. On définit le terme $M' = M\{n \leftarrow N\}$ par récurrence sur la construction de M :

— Si $M = n$, alors $M' = N$

— Si $M = k < n$, alors $M' = k$

— Si $M = k > n$, alors $M' = k - 1$

— Si $M = [B]M_1$, alors $M' = ExpAbs[B]M''$ avec $M'' = M_1\{n+1 \leftarrow N^+\}$

— Si $M = (M_1\ M_2)$, alors $M' = (M'_1\ M'_2)$ avec $M'_i = M_i\{n \leftarrow N\}$ pour $i = 1, 2$.

Exercice 10. Montrer que la substitution préserve les types, c'est-à-dire que $E \vdash N : E_n$ entraîne $E \vdash M\{n \leftarrow N\} : A$.

On définit maintenant $M\{N\}$ comme $M\{1 \leftarrow N\}$, et on munit l'ensemble des termes d'une relation de *calcul* $\rightarrow$ définie par :

— $\beta : ([A]M\,N) \rightarrow M\{N\}$

— Si $M \rightarrow M'$ alors $[A]M \rightarrow [A]M'$

— Si $M \rightarrow M'$ alors $(MN) \rightarrow (M'N)$

— Si $M \rightarrow M'$ alors $(NM) \rightarrow (NM')$

Exercice 11. Il est clair par l'exercice précédent que le calcul préserve les types. Montrer que le calcul préserve aussi la valeur des termes, au sens de leur traduction en flèches. C'est-à-dire que si $E \vdash M : A$ et $M \rightarrow N$, alors $F_E(M) = F_E(N)$ en tant que flèches de $E \rightarrow A$ dans $\mathbb{C}$.

La relation de calcul présentée ci-dessus s'appelle historiquement la β-réduction en lambda-calcul. Nous venons de voir que les lambda-calculies typés pouvaient se traduire en flèches d'une catégorie calculatoire dont les objets correspondent aux types du calcul. De plus, les équations de la théorie **Exp**. Ceci est particulièrement intéressant dans la mesure où les langages de programmation son t souvent basés sur des lambda-calculs typés. Les termes en *forme normale*, c'est-à-dire maximaux relativement à $\rightarrow$ peuvent être considérés comme des valeurs du domaine de calcul sous-jacent.

On peut montrer que la relation de calcul ci-dessus possède un certains nombre de propriétés intéressantes. En particulier, en notant $\rightarrow^*$ pour la fermeture réflexive et transitive de $\rightarrow$:

Théorème 1 (Théorèmes des résidus)**.** *Si $M \rightarrow^* M_1$ et $M \rightarrow^* M_2$, alors il existe N tel que $M_1 \rightarrow^* N$, $M_2 \rightarrow^* N$, et pour tout N' tel que $M_1 \rightarrow^* N'$ et $M_2 \rightarrow^* N'$, on a $N \rightarrow^* N'$.*

La première partie du théorème exprime la *confluence* de la relation $\rightarrow$. Nous verrons au Chapitre 3 que ce théorème exprime une propriété catégorique sur les diagrammes de calcul, l'existence de *sommes amalgamées*. Ce théorème fondamental est appelé lemme des déplacements parallèles dans la terminologie traditionnelle du lambda-calcul.

Théorème 2 (Théorème de normalisation)**.** *Tout séquence de calculs issu d'un terme bien typé est finie.*

Le point de vue logique sous-jacent aux termes de notre calcul est celui de la déduction naturelle de Gentzen. Le calcul correspond à l'élimination des coupures, qui est toujours possible par le théorème de normalisation, qui exprime que le calcul est une relation de *simplificiation*. En lambda-calul, on parle de normalisation forte, la normalisation faible étant la même proposition, mais avec une quantification exisentielle : tout terme bien typé possèdue une forme normale.

Les deux théorèmes ci-dessus ont pour corollaire :

Théorème 3 (Théorème de la forme canonique)**.** *Toute expression bien typée possède une forme normale unique, appelée sa* forme canonique*, que l'on peut atteindre en un temps fini par une séquence arbitraire de calculs.*

Nous ne montrerons pas ici les théorèmes, qui exigent des développements techniques sortant du cadre de ces notes. Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Barendregt () et à la thèse de Lévy (). Nous terminons par quelques remarques :

Remark 2 (Attention). Le calcul que nous avons présenté correspond au lambda-calcul avec β-réduction. On considère parfois une autre règle, la *η-conversion* :

$$[x : A](f\ x) = f$$

Cette règle correspond (dans la traduction ci-dessus) à l'unicité de l'exponentiation **UE**. Nous pouvons donc en rendre compte également. Toutefois, la théorie des calculs correspondants est plus compliquée.

Remark 3. Il est possible d'étendre notre langage de calcul avec plus de constructions, correspondant aux flèches primitives de catégories calculatoires. Par exemple, on peut introduire les projections Fst et Snd, ainsi que la paire $(-,-)$ et la valeur nil, avec :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}\mathrm{il} : & E \vdash \mathsf{nil} : \mathbb{1} \\ \mathsf{Fst} : & \text{Si } E \vdash M : A\&B, \text{ alors } E \vdash \mathsf{Fst}(M) : A \\ \mathsf{Snd} : & \text{Si } E \vdash M : A\&B, \text{ alors } E \vdash \mathsf{Snd}(M) : B \\ \mathsf{Paire} : & \text{Si } E \vdash M : A \text{ et } E \vdash N : B, \text{ alors } E \vdash (M, N) : A\&B \end{aligned}$$

Il faut alors ajouter les règles de calcul :

$$\begin{aligned} \mathsf{Fst}(x, y) &\to x \\ \mathsf{Snd}(x, y) &\to y \end{aligned}$$

On obtient alors un lambda-calcul typé avec produit. Ce calcul "colle" mieux aux opérateurs catégoriques. En particulier, on remarque que maintenant l'abstraction $[A]M$ a un sens pour tout type A, alors que sans cette extension les abstractions sur des types produits étaient inutilisables en l'absence d'une règle d'introduction de produit.

Il est même possible d'autoriser des liaisons arborescentes, avec des abstractions sur des paires, du style $[x : A, y : B]$. La théorie syntaxique est à revoir, car les variables ne sont plus simplement des entiers, mais plutôt des occurences d'arbres binaires, c'est-à-dire des mots sur l'alphabet $\{1, 2\}$.

Remark 4. On peut aussi ajouter des sommes, et des types primitifs, tels que $\mathbb{N}$ avec les primitives de calcul sur les entiers. La traduction des termes en flèches s'étend, dans une catégorie calculatoire avec sommes. On peut également autoriser des opérateurs de récursion, dans l'esprit du système T de Gödel.

Remark 5. Il est possible également de rendre compte du lambda-calcul non-typé, en spécifiant l'existence d'un *object universel* U.

On postule alors l'existence d'une paire de flèches Quote et Eval :

$$\begin{aligned} \mathsf{Quote} : & (\mathsf{U} \Rightarrow \mathsf{U}) \to \mathsf{U} \\ \mathsf{Eval} : & \mathsf{U} \to (\mathsf{U} \Rightarrow \mathsf{U}) \end{aligned}$$

qui définissent une rétraction entre U et $\mathsf{U} \Rightarrow \mathsf{U}$:

$$\mathsf{Retract}\colon \mathsf{Quote}; \mathsf{Eval} = \mathrm{id}$$

Un λ-terme non typé avec n variables libres est défini comme un λ-terme de type U dans un contexte U^n. On utilise la notation $\lambda x.\, M$ comme abréviation de $[x : \mathsf{U}]M$. Nous pouvons maintenant traduire tout tel terme M, avec $\mathsf{U}^n \vdash M : \mathsf{U}$, en une flèche $G_n(M)\colon \mathsf{U}^n \to \mathsf{U}$:

$$\begin{aligned} G_n(k) &= \pi_n(k) \\ G_n(\lambda x.\, M) &= []G_{n+1}(M) \\ G_n((M\ N)) &= (G_n(M), G_n(N)); \mathsf{App} \end{aligned}$$

Exercice 12. Montrer que la règle β est toujours valide, mais que la règle η correspond maintenant à postuler que la rétraction est un isomorphisme, c'est-à-dire que Quote et Eval sont inverses, ce qui rajoute une équation.

Problème 1 (Lawvere)**.** Montrer que les deux dernières extensions sont incompatibles, dans le sens qu'une catégorie calculatoire avec objet universel admet une somme (ou de manière équivalent admet un objet initial) si et seulement si elle est isomorphe à la catégorie initiale $\mathbb{1}$.

Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces compléments à l'article de **?**, ainsi qu'à la monographie de **?**.

3 Compléments

3.1 Algèbre Universelle

Le langage catégorique est bien adapté à la présentation des résultats principaux de l'Algèbre Universelle.

3.1.1 Syntaxe : Termes et Dérivations

Soit Σ un alphabet gradué par une fonction d'arité, $\mathsf{T}(\Sigma, V)$ la Σ-algèbre libre engendrée par l'ensemble de générateurs (variables) V, $\mathsf{T}(\Sigma)$ l'ensemble des termes bien formés sur Σ : $\mathsf{T}(\Sigma) = \mathsf{T}(\Sigma, \emptyset)$. On considère un ensemble E d'équations $M = N$ avec M, N dans $\mathsf{T}(\Sigma, V)$. Il est pratique de considérer d'abord E comme un ensemble de simplifications orientées, déterminant un ensemble de flèches de réécriture $A \to B$ sur l'ensemble des termes $\mathsf{T}(\Sigma)$.

Soit $\mathsf{Der}(\Sigma, E)$ la catégorie des *dérivations* dont les objets sont les termes et les flèches sont les séquences de dérivations, c'est-à-dire les simplifications étendues comme Σ-congruences. On peut alors considérer l'opérateur $F \in \Sigma$ d'arité n comme un foncteur de $\mathsf{Der}(\Sigma, E)^n \to \mathsf{Der}(\Sigma, E)$ dont la partie objet sert à construire les termes, et la partie flèche sert à exprimer que la simplification est une (semi) congruence vis à vis de F. Ceci s'étend aux termes par composition : un terme contenant n variables peut être vu comme un foncteur de même type. De même, on peut voir E comme un ensemble de transformations naturelles, la condition de naturalité exprimant la substitutivité de la simplfication. Lorsque l'on ajoute la symétrie de ces équations, on obtient des isomorphismes naturels, entre foncteurs du groupoïde des preuves équationnelles.

3.1.2 Sémantique : Théories Algébriques

Considérons donnée une présentation (Σ, E). Pour un ensemble V quelconque, soit $\mathsf{T}_V = \mathsf{T}(\Sigma, V)/{=_E}$, où $=_E$ est la congruence d'égalité engendrée par E. On considère la catégorie $\mathsf{Clone}(\Sigma, E)$ dont les objets sont les ensembles et les flèches $A \to B$ sont les fonctions de A vers T_B, étendues comme (Σ, E)-morphismes. L'identité $\mathrm{id}A$ est l'inclusion des générateurs de l'ensemble A dans T_A, la composition est la composition de fonctions. Les notions syntaxiques découlent comme des cas particuliers. Par exemple, pour un ensemble de variables formelles V donné, le *monoïde des substitutions* est l'ensemble des flèches (endomorphismes) de $V \to V$ muni de la composition ordinaire.

Différentes présentations (Σ, E) peuvent engendre la même théorie. Catégoriquement, ce phénomène est caractérisé par un isomorphisme entre les catégories $\Sigma - E{-}\mathbf{Alg}$

correspondantes, ou de manière équivalent par un isomorphisme entre les catégories $\mathsf{Clone}(\Sigma, E)$.

De manière plus abstraite, on peut définir une *théorie algébrique* basée sur une catégorie $\mathbb{C}$ arbitraire par un *triplet* $T = (\mathbb{T}, \mathbb{I}, \mathbb{O})$, où $\mathbb{T} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un foncteur et où $\mathbb{I} : \mathrm{id} \to \mathbb{T}$ et $\mathbb{O} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}$ sont des transformations naturelles vérifiant les équations :

$$\begin{aligned}(\mathbb{O}; \mathbb{T}); \mathbb{O} &= (\mathbb{T}; \mathbb{O}); \mathbb{O} \\ (\mathbb{I}; \mathbb{T}); \mathbb{O} &= \mathrm{id} \\ (\mathbb{T}; \mathbb{I}); \mathbb{O} &= \mathrm{id}\end{aligned}$$

Ces conditions assurent que $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{O}$) fournit une notion d'identité (resp. de composition) raisonable. La généralisation correspondante de la notion de clone est appelée *catégorie de Kleisli* associée à $\mathbb{T}$.

Ces notions ont été développées par Godement (sous le nom de construction standard), puis par Lawvere, Beck, ... Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de **?** pour approfondir ce sujet. Les triplets sont appelés "monads" par MacLane.

3.2 Adjonction

3.2.1 Définitions

Soit $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ deux catégories. Une *adjonction* de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}'$, notée

$$\mathbb{F} : \mathbb{C} \leftarrow \mu \rightarrow \mathbb{C}' : \mathbb{F}'$$

consiste en la donnée de deux foncteurs $\mathbb{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ et $\mathbb{F}' : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}$, ainsi que pour toute paire d'objets $A : \mathbb{C}$, $A' : \mathbb{C}'$, d'une bijection μ entre $\mathbb{C}'(\mathbb{F}(A), A')$ et $\mathbb{C}(A, \mathbb{F}'(A'))$ qui vérifie les conditions de compatibilité suivantes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}(B) \arrow[d, "\mathbb{F}(f)"'] & B \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{F}(A) \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "\mu(h)"] \\
A' \arrow[d, "g'"'] & \mathbb{F}'(A') \arrow[d, "\mathbb{F}'(g')"] \\
B' & \mathbb{F}'(B')
\end{tikzcd}$$

Finish diagram.

Finish diagram.

$$\mu - \mathbb{F} : \mu(\mathbb{F}(f); h) = f; \mu(h)$$
$$\mu - \mathbb{F}' : \mu(h); \mathbb{F}'(g') = \mu(h; g')$$

On peut remarque qu'en notation μ' pour l'inverse de μ on peut remplacer $\mu - \mathbb{F}'$ par une équation $\mu' - \mathbb{F}'$ symétrique de $\mu - \mathbb{F}$. Réciproquement on peut remplacer $\mu - \mathbb{F}$ par $\mu' - \mathbb{F}$, avec :

$$\mu' - \mathbb{F} : \mathbb{F}(f); \mu'(h') = \mu'(f; h')$$
$$\mu' - \mathbb{F}' : \mu'(h'; \mathbb{F}'(g')) = \mu'(h'); g'$$

On dit que $\mathbb{F}$ est *adjoint à gauche* de $\mathbb{F}'$, et symétriquement que $\mathbb{F}'$ est *adjoint à droite* de $\mathbb{F}$. Pour tout objet $A : \mathbb{C}$ on définit U_A comme la flèche $\mu(\mathrm{id}_{\mathbb{F}(A)}) : A \to \mathbb{F}'(\mathbb{F}(A))$.

Proposition 1. *On a une transformation naturelle* $\mathsf{U} : I \to F; F'$*, où* I *dénote le foncteur identité* $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$*.*

Démonstration. Il faut vérifier la commutation du diagramme :

□

3.2.2 Exemples

F' Foncteur d'oubli

Diagonal adjoint de Produit

Adjonctions triviales

Produit adjoint de Exponentiation

3.2.3 Adjonctions et Correspondances de Galois

Correspondance de Galois : le cas typique

Exemples

Adjonctions dans les préordres

3.3 Universalité

3.3.1 Objet naturel

3.3.2 Limites

3.3.3 Exemples

3.3.4 Noyaux

3.3.5 Produits fibrés et sommes amalgamées

3.3.6 Application aux structures libres

3.4 Cohérence

3.4.1 Catégories monoïdales

Nous avons vu au paragraphe **??** qu'une catégorie $\mathbb{C}$ admettant des produits finis possédait les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}\mathbf{Ass}(\&) &: (A\&B)\&C = A\&(B\&C)\\ \mathbf{Idl}(\mathbb{1},\&) &: \mathbb{1}\&A = A\\ \mathbf{Idr}(\mathbb{1},\&) &: A\&\mathbb{1} = A\end{aligned}$$

et que, de plus, ces isomorphismes vérifiaient la condition de compatibilité suivante.

Définition 1 (Condition de cohérence)**.** Pour tout $A : \mathbb{C}$, et tout $f : A \to A$ formé par composition des isomorphismes ci-dessus et de leurs inverses :

$$f = \mathrm{id}$$

On abstrait maintenant ces propriétés, en se plaçant dans une catégorie $\mathbb{C}$ arbitraire, vérifiant la théorie **Mon** obtenue en déclarant un objet distingué $\mathbb{1} : \mathbb{C}$, un bifoncteur $\& : \mathbb{C}\&\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, les équations ci-dessus, et la condition de cohérence. Une telle catégorie est dite *monoïdale*.

Exemple 2. — Toute catégorie admettant des produits finis est monoïdale.

— Si $\langle \mathbf{M}, \&, \mathbb{1} \rangle$ est un monoïde, alors $\mathbf{Discr}(\mathbf{M})$ est une catégorie monoïdale. Pourtant, remarquez que $\mathbb{1}$ n'est pas objet terminal, si le monoïde n'est pas le monoïde trivial $\mathbb{1}$.

3.4.2 Catégories algébroïdales

Il est aisé de généraliser cette abstraction à une théorie algébrique arbitraire, déclarant des foncteurs et des isomorphismes naturels vérifiant la condition de cohérence. Par exemple, on obtient les catégories groupoïdales en ajoutant à **Mon** un foncteur inverse $^{-1}$, et des transformations naturelles :

$$\mathbf{Invl} : A^{-1}\&A = \mathbb{1}$$
$$\mathbf{Invl} : A\&A^{-1} = \mathbb{1}$$

Il est possible de généraliser le point de vue logique dévloppé au Chapître **??** aux catégories algébroïdales sur des algèbres de Heyting. Nous renvoyons au libre de Szabo () pour cette application.

3.4.3 Confluence et cohérence

Mac Lane et Kelly () ont étudié des conditions suffisantes de cohérence, qui postulent la commutation d'un petit nombre de diagrammes formés avec les isomorphismes naturels, ce qui entraîne la commutation de tous. Nous allons expliquer cette méthode dans un cadre général, en reliant ces conditions suffisantes au théorème de Knuth-Bendix.

Remark 6 (Rappel). On suppose le lecteur familier avec les notions de base de théories équationnelles, telles que la confluence et la confluence locale. Les équations de la théorie sont représentées par des règles de *simplification* orientées, qui possèdent la propriété de faire décroître à chaque application un ordre bien fondé. Toute séquence de simplifications s'arrête don sur une *forme normale*. Dans ces conditions, le *lemme de Newman* montre l'équivalence entre les notions de *confluence* et *confluence locale*. D'autre part, Knuth et Bendix ont prouvé que la confluence locale est décidable pour les systèmes de simplifications, en montrnant que cette condition découle d'un nombre fini de vérifications d'identité de formes normales, pour ce qu'il est convenu d'appeler les *paires critiques*. Ces paires critiques sont obtenues par superpostion mutuelle des parties gauches des règles de simplification grâce à l'algorithme d'unification. Nous renvoyons pour les détails à la monographie "Equations and rewrite rules" de l'auteur (**?**).

L'application que nous allons faire ici de cette théorie concerne les équations données par les déclarations d'isomorphismes naturels. Les règles de simplficaytion correspondent donc aux transformations naturelles, dont nous oublions temporairement les inverses. L'idée fondamentale est d'étendre les propriétés de *confluence* des diagrammes à leur *commutation*. Ce qui est surprenant, c'est qu'en fait les preuves traditionnelles prouvent la généralisation catégorique sans aucun modification : l'assemblag d'un diagramme en sous-diagrammes confluents s'étend sans modification à l'assemblage du même diagramme en sous-diagrammes commutants. Il suffit de faire deux remarques : les propriétés de congruence des simplifications s'expriment par des propriétés de fonctorialité, et les propriétés de substitutivité s'expriment par des conditions de naturalité.

En fait, on peut considérer les résultats qui vont suivre comme la version intuitioniste des propriétés classiques correspondante, où les preuves de commuttion de diagrammes avaient été oubliées.

On se place dans une théorie telle que les transformations naturelles forment un système de simplifications. C'est-à-dire qu'il existe un ordre bien fondé $\succ$ sur les expressions d'objets tel que pour toute transformation $\mathbb{T}:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ de la présentation on ait $\mathbb{A}\succ\mathbb{B}$.

On appelle *flèche simplifiante* de longueur n une composition de n flèches de la forme $\mathbb{F}(f)$, où $\mathbb{F}$ est une expression dénotant un foncteur de la théorie, et f est obtenue en appliquant une transformation naturelle à des expressions d'objets de la théorie. Les seules flèches simplifiantes de longueur 0 sont les identités.

On appelle *pré-diagramme* une paire de deux flèches simplifiantes f et g de même origine : $(f:\mathbb{A}\to\mathbb{B}, g:\mathbb{A}\to\mathbb{C})$, ce que nous notons :

$$(f,g):\mathbb{A}\to\mathbb{B}=\mathbb{C}$$

Le pré-diagramme est dit *local* ssi f et g sont de longueur 1. Le pré-diagramme est dit *commutable* ssi on peut le prolonger par des flèches simplifiantes en un diagramme commutant, c'est-à-dire ssi il existe un objet D et des flèches simplifiantes $f':\mathbb{B}\to\mathbb{D}$ et $g':\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ telles que $f;f'=g;g'$. Un système de simplifications est dit *localement commutant* ssi tout pré-diagramme local est commutable. Il est dit *commutant* ssi tout pré-diagramme est commutable.

Lemme 3 (Lemme de Newton, version catégorique)**.** *Tout système de simplifictions localement commutant est commutant.*

L'algorithme de superposition définit, pour système fini de simplifications, un nombre fini de pré-diagrmmes locaux appelé *paires critiques.*

Théorème 4 (Théorème de Knuth-Bendix, version catégorique)**.** *Un système de simplifications est localement commutant si et seulement si toute paire critique est localement commutante.*

Fix bugs

Par exemple, la théorie **Mon** ci-dessus conduit aux 5 paires critiques suivantes (on indique explicitement les objets auxquels sont appliquées les simplifications) : Fix bugs

$$(\mathbf{Ass}_{A\&B,C,D},\mathbf{Ass}_{A,B,C\&D}):((A\&B)\&C)\&D \to (A\&B)\&(C\&D) = (A\&(B\&C))\&D$$
$$(\mathbf{Ass}_{\mathbb{1},B,C},\mathbf{Idl}_{B\&C}):(\mathbb{1}\&B)\&C \to \mathbb{1}\&(B\&C) = B\&C$$
$$(\mathbf{Ass}_{A,\mathbb{1},C}\mathbf{Idr}_{A\&C},):(A\&\mathbb{1})\&C \to A\&(\mathbb{1}\&C) = A\&C$$
$$(\mathbf{Ass}_{A,B,\mathbb{1}},\mathbf{Idr}_{A\&B}):(A\&B)\&\mathbb{1} \to A\&(B\&\mathbb{1}) = A\&B$$
$$(\mathbf{Idl}_{\mathbb{1}},\mathbf{Idr}_{\mathbb{1}}):\mathbb{1}\&\mathbb{1} \to \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

Une condition suffisante pour que **Mon** soit commutante est que ces cinq diagrammes soient commutables. Par exemple, on peut postuler les équations suivntes, obtenues en écrivant la confluence des diagrammes :

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{Diag}_1: & \mathbf{Ass}_{A\&B,C,D};\mathbf{Ass}_{A,B,C\&D} = \mathbf{Ass}_{A,B,B};\mathbf{Ass}_{A,B\&C,D};A\&\mathbf{Ass}_{B,C,D}\\
\mathbf{Diag}_2: & \mathbf{Ass}_{\mathbb{1},B,C};\mathbf{Idl}_{B\&C} = \mathbf{Idl}_B\&C\\
\mathbf{Diag}_3: & \mathbf{Ass}_{A,\mathbb{1},C};A\&\mathbf{Idl}_C = \mathbf{Idr}_A\&C\\
\mathbf{Diag}_4: & \mathbf{Ass}_{A,B,\mathbb{1}};A\&\mathbf{Idr}_B = \mathbf{Idr}_{A\&B}\\
\mathbf{Diag}_5: & \mathbf{Idl}_{\mathbb{1}} = \mathbf{Idr}_{\mathbb{1}}
\end{array}$$

Exercice 13. Dessiner complètement les cing diagrammes $\mathbf{Diag}_1$ à $\mathbf{Diag}_5$.

3.4.4 Application : conditions de cohérence de MacLane & Kelly

Commençons par rappeler un corollaire del confluence, la *propriété de Church et Rosser* :

Lemme 4. *Soit un système de simplifications commutant et $f:\mathbb{A} = \mathbb{B}$ un isomorphisme arbitraire de la théorie (utilisant éventuellement des simplifications inverses).*

Alors il existe un objet C et des flèches de simplification $g:\mathbb{A} \to \mathbb{C}$ et $h:\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ telles que $g = f;h$.

Il ne reste plus qu'à assembler toutes les propriétés ci-dessus.

Théorème 5 (Théorème de cohérence)**.** *Soit une théorie catégorique dont la présentation des isomorphismes forme un système de simplifications tel que les pré-diagrammes critiques soient commutables. Alors la théorie est cohérente.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ une flèche formée par composition arbitraire d'isomorphismes et de leurs inverses. On montre que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$, par récurrence Nœthérienne sur $\mathbb{A}$. En effet, par la propriété de Church et Rosser, il existe un objet B, et des simplifications $g, h:\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ telles que $g = f;h$. Si $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, alors nécessairement $g = h = \mathrm{id}$ par définition de simplification. Sinon on a $\mathbb{A} \succ \mathbb{B}$, et par hypothèse de récurrence $h^{-1};g = \mathrm{id}_{\mathbb{B}}$, d'où $f;g = g$, d'où $f = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ puisque g est iso. □

Exemple 3. La théorie **Prods** est cohérente relativement à la présentation d'isomorphismes donnée en II.3.4. En effet, il suffit de vérifier que les 5 équations $\mathbf{Diag}_1$ à $\mathbf{Diag}_5$ ci-dessus sont vérifiées dans la théorie. II.3.4

Remark 7. — Mac Lane ne donne que les diagrammes $\mathbf{Diag}_1$, $\mathbf{Diag}_3$ et $\mathbf{Diag}_5$. Ceux-ci suffisent en effet à démontrer la cohérence (Exercice : le montrer. Ces diagrammes sont-ils indépendants ?). Notre méthode exige les 5 diagrammes, car ils assurent non seulement que la théorie est cohérente mais aussi qu'elle est commutante, ce qui est une propriété plus forte. De plus, notre méthode est complétement mécnisable. En effet, on obtient facilement les diagrammes à commuter en fisant la trace des vérifications de confluence des paires critiques de la théorie.

— Lorsque des isomorphismes sont symétriques, comme par exemple une loi de commutativité $\mathbf{Comm}(\&) : \mathbb{A}\&\mathbb{B} \to \mathbb{B}\&\mathbb{A}$, la méthode peut se généraliser de façon simlaire à la généralisation par Peterson et Stickel de la méthode Knuth et Bendix. L'idée générale est de considérer **Ass** et **Comm** comme des isomorphispmes, et de montrer que les autres transformations naturelles sont commutantes modulo ces isomorphismes. Par exemple, en ajoutant **Comm** à **Mon** (sans **Idr** qui devient superflu) on obtient une présentation des catégories monoïdales symétriques, qui est commutante ssi un petit nombre de diagrammes commutent, modulo les isomorphismes **Comm** et **Ass**.

Exercice 14. Écrire ces diagrammes, et vérifier qu'ils commutent dans **Prods**, muni de l'isomorphisme supplémentaire :

$$(\mathsf{Snd}, \mathsf{Fst}) : A\&B = B\&A$$

Par contre, il n'est plus vrai que toute isomorphisme $f : A = A$ formé des isomorphismes et leurs inverses est une identité. Par exemple, dans $A\&A \to A\&A$ on n'a pas $(\mathsf{Snd}, \mathsf{Fst}) = \mathrm{id}$; grosso-modo, on peut simplement postuler qu'une telle flèche est une permutation, c'est-à-dire peut être engendrée par les lois **Comm** et **Ass**. Une notion de cohérence plus restreinte peut être définie, en se limitant à des diagrammes dont les objets sont décrits par des termes linéaires, c'est-à-dire ne possédant pas plusieurs occurences d'une même variable.

Pour en savoir plus